統計学で用いられる古典的分布関数[1)]

関　本　年　彦

コンピュータの性能向上により，各分野におけるデータの統計処理はデータ量を気にせず極めて迅速に出来るようになり，データの視覚化も極めて容易になった。この結果，統計学応用方法も一変し，質的にも高度化されたが，この趨勢が今後更に発展することに疑いの余地はない。これをコンピュータサイドの発展がもたらした恩恵と見るか，環境条件が整った今漸く過去の統計学の蓄積が活用されはじめたと見るか，様々な見方があるであろうが，これからの統計学の発展がコンピュータと密接に絡み合った方向で進められるであろうことも疑いのないところである。と同時に，これまでの統計学の蓄積をコンピュータの存在を充分に考慮しながら見直すこともこの際必要なのではないか，と考えて始めた研究の一端をまとめたのがこの小論である。

小論では，統計学の古典的な確率分布であるカイ自乗分布，t–分布および F–分布を考察する。これらの分布の根底にあるのはガンマ分布である。そこで，はじめに§1，§2でその数学的背景にあるガンマ関数に対して若干の考察を加えた後，§3，§4で確率論的立場からガンマ分布，およびそれから派生するベータ分布を考察し，さらにこれらの分布関数をコンピュータで計算するための数値計算法を論ずる。最後に，§5でカイ自乗分布，F–分布および t–分布について確率論の立場から考察し，これらがガンマ分布あるいはベータ分布の特別な例であること，したがってこれらの分布関数の計算がガンマ分布およびベータ分布の数値計算法を利用して容易に

1)　この論文は，成城大学教員特別助成による研究成果の一端をまとめたものである。

できることを示す。目次は以下の通りである。

なお，筆者は，ここで論じた各分布関数のコンピュータプログラムを作成したが，それらは現在，東京大学共同利用大形計算機センターの筆者のファイルにおいて公開してあり，ソースプログラム，オブジェクトプログラムともに各人の自由な閲覧および利用に供してある。

§ 1.　ガンマ関数とベータ関数

オイラー（Euler）によるガンマ関数の定義は，

$$(1.\ 1)\qquad \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\qquad x>0$$

である。右辺は，広義積分である。すなわち，積分の上限が∞であり，さらに $0<x<1$ のとき被積分関数が $t=0$ で定義されない。しかしながら，この広義積分が収束することはよく知られている（補遺参照）。

ガンマ関数は，任意の正の整数 n に対して n 回微分可能（無限回微分可能）である。$d^n(t^{x-1}e^{-t})/dx^n=t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n$ であり，広義積分

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt,\qquad x>0$$

は一様収束することが証明できる（補遺参照）。したがって，微積分の定理[2]と n に関する帰納法により，各 n に対し

(1．2)　　$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt$$

であることがわかる。

(1．1) の右辺を部分積分することにより，ガンマ関数は関数方程式

(1．3)　　$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

を満たすことが確かめられる。(1．1) より $\Gamma(1)=1$ であるから，n が正の整数のとき $\Gamma(n+1)=n!$ であり，ガンマ関数は階乗を補間する関数であることがわかる。整数でない負数 x に対しては，$-(n+1)<x<-n$ すなわち $0<x+n+1<1$ として，ガンマ関数の値を

(1．4)　　$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n)(x+n-1)\cdots x}$$

によって定義する。このようにして拡張されたガンマ関数も，関数方程式 (1．3) を満たす。

ガンマ関数は，関数方程式 (1．3) と $\Gamma(1)=1$ のほかに $\log\Gamma(x)$ が凸関数であることによって特徴づけられることが，Emil Artin [2] によって初等的に証明されている。これを厳密に述べるとつぎのようになる。

定理　つぎの三条件を満たす関数 $f(x)$ は，その定義域においてガンマ関数に一致する。

(1)　$f(x+1)=xf(x)$,

(2)　定義域はすべての正の実数を含み，$x>0$ に対しては $f(x)>0$ であり，$\log f(x)$ が凸関数である，

(3)　$f(1)=1$。

つぎに，ベータ関数 $B(x, y)$ の定義は，

(1．5)　　$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x,\ y>0$$

---

2)　パラメータつきの広義積分に関する定理：$f(t, x)$，$\partial f(t, x)/\partial x$ が $[a, b)\times I$（I は任意の区間）で連続，広義積分 $F(x)=\int_a^b f(t, x)dt$ が I の各点で収束し，$\int_a^b(\partial f(t, x)/\partial x)dt$ が I で一様収束すれば，$F(x)$ は I で微分可能であり，$F'(x)=\int_a^b(\partial f(t, x)/\partial x)dt$ である。

である。右辺は，オイラーの第1種積分といわれ，(1．1) の右辺にあるガンマ関数を与える積分が，オイラーの第2種積分といわれる。この積分も，$0<x<1$ または $0<y<1$ のとき広義積分である。

ガンマ関数とベータ関数との間には，次式のような関係が存在する。

(1．6)
$$B(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x,\ y)}$$

この等式についてはいくつかの証明法が知られているが，§3で述べるような確率論的なものがもっとも簡単である。

§2. ガンマ関数の鏡映公式

負数 x に対する $\Gamma(x)$ の値は (1．4) で定められるが，この定義式が示すように，ガンマ関数はゼロおよび負の整数に対しては定義されない。したがって，関数 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ を考えると，この関数は整数に対しては定義されない。$\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ は，同様の性質をもつ初等的な関数である $1/\sin \pi x$ との間に，つぎの式で表されるような興味深い重要な関係をもっている。

(2．1)
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$$

この式は，数値解析では鏡映公式 (reflection formula) と呼ばれ，$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)$ を代入すると，

(2．2)
$$\Gamma(x)\Gamma(-x)=-\frac{\pi}{x \sin \pi x}$$

が得られる。整数に対するガンマ関数の近似値の求め方は後述するが，負数に対するガンマ関数の値を求めるにはこの式が用いられる。

以下に鏡映公式の証明をしておく。

補題（ルジャンドル—Legendre）

(2．3)
$$\Gamma(2x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

証明

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=B(x,\ x)=\int_0^1 t^{x-1}(t-1)^{x-1}dt$$

において，変数変換 $t(1-t)=s/4$ を行うと，関数 $t(1-t)$ は $t=1/2$ に関して対称であることに注意して

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=2\int_0^{1/2} t^{x-1}(t-1)^{x-1}dt$$

$$=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{-1/2}ds=\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2x-1}\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

両端の式を等置したものから（２．３）が得られる。□

鏡映公式の証明

(2．4)
$$f(x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$$

とおくと，$\Gamma(-x)=\Gamma(1-x)/(-x)$ であるから $f(x+1)=f(x)$ すなわち，$f(x)$ は1を周期とすることがわかる。$\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ の値は，x が整数であるとき定義されないが，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ を用い，さらに $\sin\pi x$ を級数に展開することにより

$$f(x)=\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)\left(\pi-\frac{\pi^3x^2}{3!}+\frac{\pi^5x^4}{5!}-\cdots\right)$$

となり，（　）内の級数は，全区間で収束する。そこで，$f(0)$ の値を $x=0$ のときの右辺の値である π と定めると $f(x)$ は $x=0$ で連続であり，さらに $x=0$ で無限回微分可能になる。結局，$f(x)$ は1を周期とすることから全区間で無限回微分可能となる。

つぎに，ルジャンドルの公式により $\Gamma(x)=(2^{x-1}/\Gamma(1/2))\Gamma(x/2)\Gamma(x/2+1/2)$，$\Gamma(1-x)=(2^{-x}/\Gamma(1/2))\Gamma((1-x)/2)\Gamma(1-x/2)$，また $\sin\pi x=2\sin(\pi x/2)\cos(\pi x/2)=2\sin(\pi x/2)\sin(\pi(x+1)/2)$ であるから，これらを（2．4）に代入し，$c=\Gamma(1/2)^{-2}$ とすると，

$$cf(x)=cf\left(\frac{x}{2}\right)cf\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

を得る。さらに，n に関する帰納法により

$$cf(x)=cf\left(\frac{x}{2^n}\right)cf\left(\frac{x+1}{2^n}\right)\cdots cf\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right)$$

を得る。$g(x)=\log(cf(x))$ とおいてこの式を書き直すと

（2．5）
$$g(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}g\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

となり，両辺を x で微分すると

（2．6）
$$g'(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}g'\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

である。$g'(t)=f'(t)/f(t)$ は，区間 $0\leq t\leq 1$ で連続であるからこの区間で積分可能である。ここで $0\leq x\leq 1$ を仮定するが，$f(x)$ は，したがって $g(x)$ も，1を周期とするので，結論は全ての実数について成り立つ。そこで，（2．6）の右辺の $n\to\infty$ のときの極限を考えると，$k/2^n\leq(x+k)/2^n\leq(k+1)/2^n$ に注意すれば，その値は $\int_0^1 g'(t)dt$ に等しくなることがわかる。この定積分の値を A とおくと，B を積分定数として $g(x)=Ax+B$ が成り立ち，この結果を用いて（2．5）を書き直すと

$$Ax+B=\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(A\frac{x+k}{2^n}+B\right)=A\left(x+\frac{2^n(2^n-1)}{2^{n+1}}\right)+2^nB$$

で，これが任意の正の整数 n に対して成り立つのであるから，$A=B=0$ でなければならない。これから $g(x)=0$，すなわち $f(x)=\Gamma(1/2)^2$（定数！）であることがわかる。上で $f(0)=\pi$ としたので，$f(x)$ は π に等し

い定数である。□

なお，$f(x)=\pi$ であるから（2．4）において $x=1/2$ とおくと

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{2. 7}$$

を得る。

§3. ガンマ密度関数

以下では，Xを確率変数とするとき，$\mathrm{X}\leq x$ である確率を $\mathbf{P}\{\mathrm{X}\leq x\}$ で表すことにする。

統計学においては，ガンマ関数は以下で定義されるガンマ密度関数の形で利用される。

$$f_{c,a}(x)=\frac{1}{\Gamma(a)}c^{a}x^{a-1}e^{-cx} \tag{3. 1}$$

パラメータ c は，計算の便宜上導入されたもので，以下の議論を $f_{1,a}$ だけを用いて進めることもできる。実際，確率変数Xの密度関数を $f_{1,a}$ とすると，X/c の密度関数が $f_{c,a}$ になる。ガンマ関数の漸化式（1．3）より $f_{1,a}$ の平均と分散は，ともに a であることがわかるが，これから $f_{c,a}$ の平均と分散の値として a/c と a/c^2 を得る。

密度関数の畳み込み (convolution) 作用素の記号として$*$を導入する。すなわち，f, g を確率変数X, Yの密度関数とするとき，X+Yの密度関数，すなわち $\mathbf{P}\{\mathrm{X}+\mathrm{Y}\leq x\}$ の導関数を Feller [3] にしたがって $f*g$ と記すことにする。$F(x)=\mathbf{P}\{\mathrm{X}\leq x\}$ とおいて $\mathbf{P}\{\mathrm{X}+\mathrm{Y}\leq x\}=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x-y)g(y)dy$ を微分すれば

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy \tag{2. 2}$$

を得る。この密度関数は f, g の畳み込みといわれ，XとYの役割は対称であるから作用素$*$は可換である。とくに $\mathrm{X}>0$, $\mathrm{Y}>0$ のときは

(3．3)　$$f*g(x)=\int_0^x f(x-y)g(y)dy=\int_0^x f(y)g(x-y)dy$$

である。

ガンマ密度関数は，畳み込み作用素に関して閉じているという重要な性質をもっている：

(3．4)　$$f_{c,a}*f_{c,b}=f_{c,a+b}$$

証明　(3．3) により

$$f_{c,a}*f_{c,b}(x)=\int_0^x f_{c,a}(x-y)f_{c,b}(y)dy.$$

変数変換 $y=xt$ により

$$f_{c,\mu}*f_{c,\nu}(x)=\left[\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt\right]f_{c,a+b}(x)$$

を得るが，左辺および $f_{c,a+b}(x)$ は確率密度関数であるから，右辺の[　] 内は1でなければならない。□

系

(3．5)　$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

なお，これによりガンマ関数とベータ関数との関係式 (1．6) が証明された訳である。

§4.　不完全ガンマ関数，不完全ベータ関数，およびそれらの数値計算式

不完全ガンマ関数 $P(a,\ x)$ および不完全ベータ関数 $I_x(a,\ b)$ の定義はつぎのとおりである。

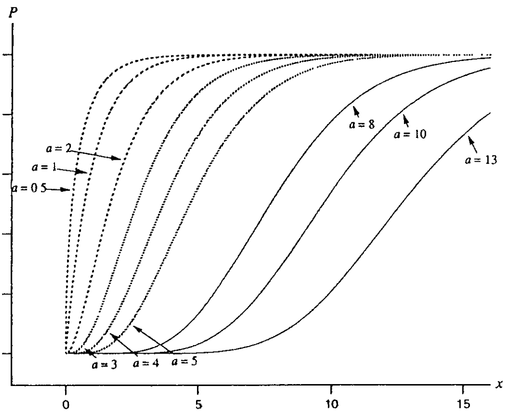
(4．1)　$$P(a,\ x)=\int_0^x f_{1,a}(t)dt=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x t^{a-1}e^{-t}\mathrm{dt},$$

$$a>0,\ 0<x<\infty,$$

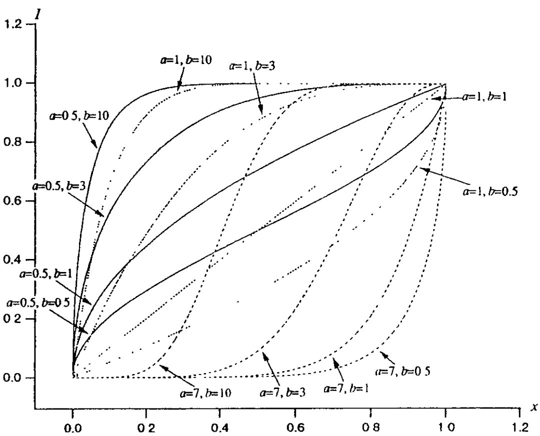
(4．2) $$I_x(a,\ b)=\frac{1}{B(a,\ b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \qquad a,\ b>0,\ 0<x<1.$$

不完全ベータ関数については，つぎのような対称式が成り立つ：

(4．3) $$I_x(a,\ b)+I_{1-x}(b,\ a)=1.$$



不完全ガンマ関数 $P(a,\ x)$ のグラフ



不完全ベータ関数 $I_x(a,\ b)$ のグラフ

ガンマ関数の数値計算　不完全ガンマ関数および不完全ベータ関数の数値計算には，ガンマ関数の数値計算が必要になる。そこで，ガンマ関数の数値計算のための近似式を与えておく。これは C. Lanczos [4] が開発したもので，極めて優れた近似式である。

(4．4)　$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}(x+4.5)^{x-1/2}e^{-(x+4.5)}[A(x)+\varepsilon],$$
$$x>0,\ |\varepsilon|<2\cdot 10^{-10},$$

(4．5)　$$A(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x+1}+\frac{c_3}{x+2}+\frac{c_4}{x+3}+\frac{c_5}{x+4}+\frac{c_6}{x+5}.$$

$c_0=$	1.000,000,000,178		
$c_1=$	76.180,091,729,406	$c_4=$	−1.231,739,516,140
$c_2=$	−86.505,320,327,112	$c_5=$	0.001,208,580,030
$c_3=$	24.014,098,222,230	$c_6=$	−0.000,005,363,820

ガンマ関数は，階乗の補間式であることからわかるように，関数値 $\Gamma(x)$ は x の増加につれて急上昇する。したがって，プログラムとしては $\log\Gamma(x)$ を用意しておくのがよい。

不完全ガンマ関数の数値計算　(4．1) で定義した不完全ガンマ関数 $P(a,\ x)$ の数値計算には，つぎのような整級数が用いられる。

(4．6)　$$\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt=e^{-x}x^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(a+n)\cdots(a+1)a},\qquad a>0,\ x>0.$$

不完全ベータ関数の数値計算　(4．2) で定義した不完全ベータ関数 $I_x(a,\ b)$ の数値計算には，つぎのような連分数展開式を用いる。

(4．7)　$$I_x(a,\ b)=\frac{x^a(1-x)^b}{aB(a,\ b)}\left[\frac{1}{1+}\ \frac{d_1}{1+}\ \frac{d_2}{1+}\cdots\right],\qquad a,\ b>0,\ 0<x<1,$$
$$d_{2m+1}=-\frac{(a+m)(a+b+m)x}{(a+2m)(a+2m+1)}.$$

$$d_{2m}=\frac{m(b-m)x}{(a+2m-1)(a+2m)}.$$

この連分数展開式の収束速度は，$x<(a+1)/(a+b+1)$ の範囲で良好である。$x>(a+1)/(a+b+1)$ の範囲においては，不完全ベータ関数の対称式（4．3）を用いることにより $I_{1-x}(b, a)$ を計算するのがよい。

連分数の計算法　上で連分数が用いられたが，連分数は数値計算式の中でよく現れる。そこで，連分数の計算法を述べておく。連分数の一般形

（4．8）
$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\cfrac{a_5}{b_5+\cdots}}}}}$$

は，記法の便宜上

（4．9）
$$b_0+\frac{a_1}{b_1+}\ \frac{a_2}{b_2+}\ \frac{a_3}{b_3+}\ \frac{a_4}{b_4+}\ \frac{a_5}{b_5+}\ \cdots$$

とも書かれる。a_n, b_n までで打ち切った値を

(4.10)
$$f_n=\frac{P_n}{Q_n}$$

と書けば P_n, Q_n は，つぎのような漸化式で与えられる。

(4.11)　$P_{-1}=1,\ P_0=b_0,\ Q_{-1}=0,\ Q_0=1,$

(4.12)　$P_n=b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2},\ Q_n=b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}.$

(4.12) は，n に関する帰納法で証明される。実際，$n=1$ のときは簡単な計算で確かめられ，一般の場合については，(4.12) の b_n に b_n+a_{n+1}/b_{n+1} を代入すればよい。

漸化式 (4.12) による繰返し計算の過程で，P_n, Q_n, P_{n-1}, Q_{n-1} の全てをゼロでない数 R で割ったものを P_{n+1}, Q_{n+1} の計算に用いてもよいが，こう

することにより P_n, Q_n の絶対値を適宜調整することができる。とくに R として Q_n を採れば P_{n+1}, Q_{n+1} はそれぞれ $b_{n+1}f_n+a_{n+1}P_{n-1}/Q_n$, $b_{n+1}+a_{n+1}Q_{n-1}/Q_n$ となり，割り算の実行回数を減らすことができる。

§ 5. 統計学で用いられる古典的分布

この§では，正規分布，カイ2乗分布，F–分布，t–分布の分布関数が，不完全ガンマ関数あるいは不完全ベータ関数で表現できることを示す。その結果，それらの分布関数の数値計算は，§4で述べた不完全ガンマ関数あるいは不完全ベータ関数の数値計算法によって可能になる。

正規分布　平均0分散1の正規分布の密度関数は，

(5. 1)　$$\boldsymbol{n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=|x|f_{1/2,\,1/2}(x^2)=\frac{|x|}{2}f_{1,\,1/2}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

である。また，$\mathcal{N}(x)=\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{n}(t)dt$（分布関数）とすると，$x>0$ に対して

(5. 2)　$$\mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(-x)=P\left(\frac{1}{2},\ \frac{x^2}{2}\right)$$

である。

証明

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

とすると，変数変換 $s=t^2$ により，

$$\int_0^x\boldsymbol{n}(t)dt=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}s^{1/2-1}e^{-s/2}ds=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{x^2}f_{1/2,\,1/2}(s)ds$$

である。微分により，

(5. 3)　$$\boldsymbol{n}(x)=\varepsilon xf_{1/2,\,1/2}(x^2)=|x|f_{1/2,\,1/2}(x^2)=\frac{|x|}{2}f_{1,\,1/2}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

を得る。$x>0$ とすると

$$\mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(-x)=2\int_0^x \boldsymbol{n}(t)dt=\int_0^x tf_{1,\,1/2}\left(\frac{t^2}{2}\right)dt=P\left(\frac{1}{2},\ \frac{x^2}{2}\right).$$

□

カイ２乗分布　$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ をたがいに独立な平均０分散１の正規分布をする確率変数とするとき，$\chi_n{}^2=\mathbf{X}_1{}^2+\mathbf{X}_2{}^2+\cdots+\mathbf{X}_n{}^2$ の分布を自由度 n のカイ２乗分布という。まず，

$$\mathbf{P}\{\mathbf{X}_1{}^2\leq x\}=\mathcal{N}(\sqrt{x})-\mathcal{N}(\sqrt{-x})=2\int_0^{\sqrt{x}} \boldsymbol{n}(t)dt$$
$$=2\int_0^{\sqrt{x}} tf_{1/2,\,1/2}(t^2)dt$$

を微分して $\mathbf{X}_1{}^2$ の密度関数を求めると，$f_{1/2,1/2}(x)\,(x>0)$ である。したがって，自由度 n のカイ２乗分布の密度関数は（3．4）により $f_{1/2,\,n/2}(x)$ $(x>0)$ である。また，カイ２乗分布関数は，

$$\mathbf{P}\{\chi_n{}^2\leq x\}=\int_0^x f_{1/2,\,n/2}(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}f_{1,\,n/2}\left(\frac{t}{2}\right)dt=P\left(\frac{n}{2},\ \frac{x}{2}\right),\ x>0$$

である。

補題（分数確率変数の密度関数）　$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ をたがいに独立な確率変数とし，$\mathbf{Y}>0$ とする。f, g を $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ の密度関数とすると，$\mathbf{T}=\mathbf{X}/\mathbf{Y}$ の密度関数は，

$$(5.\ 4)\qquad w(x)=\int_0^\infty f(xy)yg(y)dy$$

である。

証明　F を $\mathbf{X}$ の分布関数とすると，$\mathbf{T}$ の分布関数は，$\int_0^{+\infty}F(xy)g(y)dy$ で，これを微分することにより（5．4）のような $\mathbf{T}$ の密度関数が得られる。□

F-分布　$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ をたがいに独立な平均０分散１の正

規分布をする確率変数とし，$\mathbf{X}=\mathbf{X}_1^2+\mathbf{X}_2^2+\cdots+\mathbf{X}_m^2$, $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_1^2+\mathbf{Y}_2^2+\cdots+\mathbf{Y}_n^2$ とするとき，確率変数 $\mathbf{F}_{m,n}=(\mathbf{X}/m)/(\mathbf{Y}/n)$ の分布を自由度 (m, n) の F–分布という。

F–分布の密度関数（F–密度関数）は，

$$w(x)=\frac{m\left(\dfrac{m}{n}x\right)^{m/2-1}}{B\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{n}{2}\right)n\left(\dfrac{m}{n}x+1\right)^{(m+n)/2}} \tag{5. 5}$$

また，分布関数 $P(F|m, n)=\mathbf{P}\{\mathbf{F}_{m,n}\leq F\}\,(F>0)$ については，

$$P(F|m, n)=\int_0^F w(x)dx=1-I_{\frac{n}{n+mF}}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)=I_{\frac{mF}{n+mF}}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \tag{5. 6}$$

が成り立つ。

証明　まず，

$$\mathbf{P}\{\mathbf{X}/m\leq x\}=\mathbf{P}\{\mathbf{X}\leq mx\}=\int_0^{mx} f_{1/2,\,m/2}(t)dt$$

を微分して $\mathbf{X}/m$ の密度関数 $mf_{1/2,\,m/2}(mx)$ を得るが，同様にして $\mathbf{Y}/n$ の密度関数 $nf_{1/2,\,n/2}(nx)$ を得る。（5．4）を用いると

$$\begin{aligned}
w(x)&=\int_0^\infty mf_{1/2,\,m/2}(mxy)ynf_{1/2,\,n/2}(ny)dy\\
&=\frac{m^{m/2}n^{n/2}x^{m/2-1}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)2^{(m+n)/2}}\int_0^\infty y^{(m+n)/2-1}e^{-(mx+n)y/2}dy\\
&=\frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)m^{m/2}n^{n/2}x^{m/2-1}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)2^{(m+n)/2}}\left(\frac{mx+n}{2}\right)^{-(m+n)/2}\int_0^\infty f_{(mx+n)/2,\,(m+n)/2}(y)dy\\
&=\frac{m\left(\dfrac{m}{n}x\right)^{m/2-1}}{B\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{n}{2}\right)n\left(\dfrac{m}{n}x+1\right)^{(m+n)/2}}
\end{aligned}$$

である。

つぎに（5．6）を証明する。

$$\int_0^F w(x)dx=\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)}\int_0^F\left(\frac{m}{n}x\right)^{m/2-1}\left(\frac{m}{n}x+1\right)^{-(m+n)/2}d\left(\frac{m}{n}x\right)$$

において変数変換 $s=1/(mx/n+1)$ により

$$\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)}\int_{\frac{n}{mF+n}}^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{m}{2}-1}ds=1-I_{\frac{n}{mF+n}}\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$$

$$=I_{\frac{mF}{mF+n}}\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)$$

を得る。□

***t*–分布**　$\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ をたがいに独立な平均 0 分散 1 の正規分布をする確率変数とし，$\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1^2+\mathbf{X}_2^2+\cdots+\mathbf{X}_n^2$ とするとき，確率変数 $\mathbf{T}_n=\mathbf{X}/\sqrt{\mathbf{Y}/n}$ の分布を自由度 n のスチューデント（Student）の t–分布，あるいは単に自由度 n の t–分布という。この分布の密度関数は

（5．7）　$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}},$$

また，$t>0$ に対して

（5．8）　$$A(t\,|\,n)=\mathbf{P}\{|\mathbf{T}_n|\leq t\}=1-I_{\frac{n}{n+t^2}}\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)=I_{\frac{t^2}{n+t^2}}\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right)$$

が成り立つ。

証明

$\sqrt{\mathbf{Y}/n}$ の密度関数は

$$\mathbf{P}\{\sqrt{\mathbf{Y}/n}\leq x\}=\mathbf{P}\{\mathbf{Y}\leq nx^2\}=\int_0^{nx^2}f_{1/2,\ n/2}(t)dt$$

を微分して $2nxf_{1/2,\ n/2}(nx^2)$ である。したがって，（5．4）により $\mathbf{T}$ の密度関数は，

$$w(x)=\int_0^{\infty}\boldsymbol{n}(xy)y\,2ny\,f_{1/2,\,n/2}(ny^2)dy.$$

変数関数 $t=y^2$ により

$$w(x)=\int_0^{\infty}n\boldsymbol{n}(xt^{1/2})t^{1/2}f_{1/2,\,n/2}(nt)dt$$

$$=\frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}t^{(n+1)/2-1}e^{-(x^2+n)t/2}dt$$

$$=\frac{n^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left\{\frac{n}{2}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right\}^{(n+1)/2}}\int_0^{\infty}f_{(n+x^2)/2,\,(n+1)/2}(t)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

である。

つぎに，(5．8) の証明をする。$t>0$ であるから，

$$A(t|n)=2\int_0^t w(x)dx$$

であり，変数変換 $s=1/(1+x^2/n)$ により，$dx=-\sqrt{n}\,s^{-3/2}(1-s)^{-1/2}ds$ で

$$A(t|n)=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right)}\int_{n/(n+t^2)}^{1}s^{n/2-1}(1-s)^{1/2-1}ds$$

$$=1-I_{n/(n+t^2)}\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)=I_{t^2/(n+t^2)}\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right)$$

が成り立つ。□

次表は，小論で述べた各関数の Fortran 言語によるプログラムの一覧表である。これらのソースプログラムはすべて東京大学共同利用大型機センター・主システムの区分編成ファイル ♯C31240. STAT. FORT に，また

オブジェクトプログラムは＃C31240. STAT. LOAD に保管してある。自由にご利用頂きたい。

副プログラム[1]	意味	利用副プログラム
GAMMLN(X), X > 0	$\log \Gamma(x)$	
GAMMP(A,X), A>0,X≥0	$\Gamma(a)^{-1}\int_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt$	GAMMLN
BETAI(A,B,X), A,B > 0, 0≤X≤1	$B(a,b)^{-1}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$	GAMMLN, BCF[2]
PNORM(X) QNORM(X) RNORM(X), X ≥ 0	$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2)\,dt$ $(2\pi)^{-1/2}\int_x^\infty \exp(-t^2/2)\,dt$ $(2\pi)^{-1/2}\int_{-x}^x \exp(-t^2/2)\,dt$	GAMMP, GAMMLN
CHIP(N,X), X ≥ 0 CHIQ(N,X), X ≥ 0	$\mathrm{P}\{\chi_n^2 \le x\}$ $\mathrm{P}\{\chi_n^2 \ge x\}$	GAMMP, GAMMLN
FDISTP(M,N,X), X ≥ 0 FDISTQ(M,N,X), X ≥ 0	$\mathrm{P}\{\mathrm{F}_{m,n} \le x\}$ $\mathrm{P}\{\mathrm{F}_{m,n} \ge x\}$	BETAI, GAMMLN, BCF
TDISTP(N,X), X ≥ 0 TDISTQ(N,X), X ≥ 0	$\mathrm{P}\{\lvert\mathrm{T}_n\rvert \le x\}$ $\mathrm{P}\{\lvert\mathrm{T}_n\rvert \ge x\}$	BETAI, GAMMLN, BCF

1) いずれも倍精度実数型関数副プログラムである。また，引数は整数型または単精度実数型である。
2) BCF (A, B, X) は（4. 7）の連分数を計算する関数副プログラム。

補遺

1．オイラー第2種積分の収束性

積分区間［0, ∞）を二つの区間［0, 1]，［1, ∞）に分けて考えると都合がよい。そして，

$$\Phi(k, x)=\int_k^1 t^{t-1}e^{-t}dt, \qquad \Psi(m, x)=\int_1^m t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad k, m>0$$

とする。

$0<x<1$ であるとき，t の関数 $t^{x-1}e^{-t}$ の定義域は $(0, \infty)$ であるから，$\Phi(0, x)$ は広義積分である。$\Phi(k, x)$ が $k\to 0$ のとき収束することは，コーシー（Cauchy）条件：任意の $\varepsilon>0$ に対して $0<k_1, k_2\le h$ ならば $|\Phi(k_1, x)-\Phi(k_2, x)|<\varepsilon$ が成り立つような $h>0$ が存在すること，と同値

である。

ところで，十分ゼロに近い $t(>0)$ に対しては $t^{1-x}(t^{x-1}e^{-t})<1$ であるから，$t^{x-1}e^{-t}<t^{x-1}$ であり，したがって，十分ゼロに近い $k_1, k_2>0$ 対して

$$|\Phi(k_1, x)-\Phi(k_2, x)|\leq\left|\int_{k_1}^{k_2}t^{x-1}dt\right|$$

である。しかるに，広義積分 $\int_0^1 t^{x-1}dt$ は収束するので上式の右辺は $k_1, k_2\to 0$ のとき収束し，したがって，$\Phi(k, x)$ が $k\to 0$ のとき収束するためのコーシー条件が成り立つ。

広義積分 $\Psi(\infty, x)$ については，十分大きい t に対して $t^2(t^{x-1}e^{-t})<1$ すなわち $t^{x-1}e^{-t}<t^{-2}$ であるから，被積分関数を t^{-2} に替えてコーシーの収束条件を確かめればよい。

2. 広義積分 $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt(n=1, 2, \ldots)$ の一様収束性

はじめに，a を正数とすると $t^a\log t\to 0(t\to 0)$，$t^{-a}\log t\to 0(t\to\infty)$ であることを注意しておく。上と同じく

$$\Phi(k, x)=\int_k^1 t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt,$$

$$\Psi(m, x)=\int_1^m t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt, \qquad k, m>0$$

とする。

広義積分 $\Phi(0, x)$ の $(0, \infty)$ における一様収束性を証明する。$0<c\leq x$ とすると十分ゼロに近い $t(>0)$ に対して $|t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n|=|t^{c-1}e^{-t}(t^{(x-c)/n}\log t)^n|\leq t^{c-1}$ であるから，十分ゼロに近い $k_1, k_2(>0)$ に対して

$$|\Phi(k_1, x)-\Phi(k_2, x)|\leq\left|\int_{k_1}^{k_2}t^{c-1}dt\right|.$$

しかるに，広義積分 $\int_0^1 t^{c-1}dt$ は収束するので上式の右辺は $k_1, k_2\to 0$ のとき収束し，しかも x を含まない。したがって，$\Phi(k, x)$ が $[c, \infty)$ において $k\to 0$ のとき一様収束するためのコーシー条件が成り立つ。$c>0$ はゼロの

任意の近傍にとれるから，$\Phi(0, x)$ は $(0, \infty)$ で一様収束する。

広義積分 $\Psi(\infty, x)$ の $(0, \infty)$ における一様収束性についてもほぼ同様に証明できる。十分大きい t に対して $t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n = t^{-2}(t^x e^{-t}(t^{1/n}\log t)^n) \leq t^{-2}$ であるから，十分大きい M_1, M_2 に対して

$$|\Psi(M_1, x)-\Psi(M_2, x)| \leq \left| \int_{M_1}^{M_2} t^{-2}dt \right|.$$

が成り立つ。しかるに，広義積分 $\int_1^\infty t^{-2}dt$ は収束し，しかも x に無関係である。したがって，$\Psi(M, x)$ が $[1, \infty)$ において $M \to 0$ のとき一様収束するためのコーシー条件が成り立ち，$\Psi(\infty, x)$ は $(0, \infty)$ で一様収束することが分かる。

参 考 文 献

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Chapter 6, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[2] E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, Chapter II, John Wilely & Sons, New York, 1971.

[4] C. Lanczos, *A precision approximation of the gamma function*, SIAM Journal of Numerical Analysis, Series B, 1 (1964), pp. 86-96.

[5] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Chapter 6, Cambridge Univerity Press, 1986.