経済成長と環境汚染*

吉岡守行

一 序論

環境汚染の問題を考慮しない経済成長理論は、暗黙のうちに次のいずれかの仮定に立脚しているのである。
(一)経済活動の過程で環境汚染現象は発生しない。
(二)もし環境汚染現象が発生しても、それらは社会にとっては無費用で処分され得るものである。
なんらの環境汚染も発生しないという仮定はあまりにも素朴であり、無費用処分可能性の前提は現実世界においてとうてい満足され得ないものである。

ところで、D'Arge〔1〕はハロッド＝ドーマー型のモデルに環境汚染の要因を導入し、そこでの恒常状態に到達するためには、貯蓄率と環境汚染の程度を減少せしめる投資の効率は消費と生産によってもたらされる環境汚染を償うのに十分高くなければならないという結論を導いた。次いで、Forster〔4〕はD'Arge〔1〕の結論はあまりにも制限的であるとし、新古典派型の経済成長モデルに環境汚染の要因を導入したモデルを提示し、そしてそこ

での恒常状態の安定性を位相図を用いて証明した。なお彼の分析は資本と環境汚染量との間の分離可能性を前提としている。

本論文の目的は Forster 〔4〕のモデルに Olech 〔9〕の定理を適用し恒常状態の大域的安定性を証明することにある。[1] その際、われわれは Forster 〔4〕の分析の仮定・資本と環境汚染量間の分離可能性を前提としない。

二 Forster・モデル

次節でわれわれの分析を行う前の準備として、本節では Forster 〔4〕のモデルを検討する。

生産関数は資本と環境汚染量の（線型の分離可能な）凹関数であるとする。Kを資本、Pを環境汚染量とすると、それは次の如く表わされる。

(1) $\phi=\phi(K, P)\in C^{(2)}$

資本の限界生産物は正であるが、逓減的であると仮定せられる。

(2) $\phi_K>0 \quad K[0, \infty)$

$\phi_{KK}<0$

環境汚染の限界生産物は負であり、以前より一層汚染がつけ加わると、以前の汚染がなしたよりより以上の産出量の減少がもたらされる。

(3) $\phi_P<0 \quad P[0, \infty)$

$\phi_{PP}<0$

資本と環境汚染量との間の分離可能性の仮定は非現実的ではあるが、問題を簡単化する。経済的にはそれは体系において、資本の限界生産物と環境汚染の水準は独立しているということである。式としては

(4)　$\phi_{KP}=\phi_{PK}=0$

と表わされる。

社会は総産出量の一定割合 s を蓄積し投資する。

(5)　$\dot{K}=s\phi(K,\ P)-\delta K$

ここで δ は資本設備の一定の指数的減価償却率であり、$\dot{K}=dK/dt$ である。

生産過程において資本が用いられると、環境汚染がもたらされる。用いられる資本が多くなればなるほど、それだけ一層多くの環境汚染が発生する。しかしながら環境汚染のストックは一定の指数率 α で減少する。

(6)　$\dot{P}=g(K)-\alpha P \qquad (\dot{P}=dP/dt)$

ここで

$$g(0)=0$$

(7)　$g'(K)>0 \qquad K\epsilon[0,\ \infty)$

$$g''(K)\geqq 0$$

である。この仮説上の経済の展開は、次の二つの方程式によって叙述される。

(8)　$\begin{cases}\dot{K}=s\phi(K,\ P)-\delta K & K(0)=K_0\\ \dot{P}=g(K)-\alpha P & P(0)=P_0\end{cases}$

この展開は位相図を用いて幾何学的に描かれうる。最初に一定の資本ストック：$\dot{K}=0$ をもたらす（K，P）の軌跡を考察しよう。

$$(9)' \quad N(K,\ P)\equiv s\phi(K,\ P)-\delta K=0$$

と定義し、(9)′の両辺をKとPについて偏微分すると

$$(9)'' \quad N_K=s\phi_K-\delta\gtrless 0 \quad \text{as} \quad K\lessgtr\bar{K}$$

$$(9)''' \quad N_P=s\phi_P<0$$

が成立する。

また(9)′を全微分すると、次式を求めることができる。

$$(10) \quad (s\phi_K-\delta)dK+s\phi_P dP=0$$

(10)式から

$$(11) \quad \left.\frac{dP}{dK}\right|_{\dot{K}=0}=\frac{s\phi_K-\delta}{-s\phi_P}\gtrless 0 \quad \text{as} \quad K\lessgtr\bar{K}$$

を得る。この式より $\dot{K}=0$ となる（K，P）の軌跡をつないだ曲線の勾配は、Kが$\bar{K}$より小の場合は正となり、大の場合は負となることが分かる。KとPとの分離可能性を仮定しているから

$$(12) \quad \frac{d^2P}{dK^2}=\frac{s\phi_{KK}}{-s\phi_P}<0$$

となり、この曲線は上に凸形をしていることが了解される。

次に環境汚染量を一定に保つ、すなわち $\dot{P}=0$ をもたらす（K, P）の軌跡の方程式は(8)式の二番目の式より

(13) $P\Big|_{\dot{P}=0}=\dfrac{g(K)}{\alpha}$

となる。

(13)の両辺をKで微分すると次式が得られる。

(14) $\dfrac{dP}{dK}\Big|_{\dot{P}=0}=g'/\alpha>0$

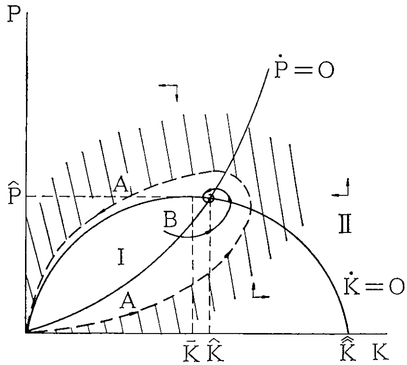

図 1

以上の結果は図1で表わされる。Kが一定の場合$\dot{K}$は環境汚染量の減少関数であるから、図1で $\dot{K}=0$ をもたらす（K, P）の軌跡をつないだ曲線の上部では $\dot{K}<0$ となり、下の部分では $\dot{K}>0$ となる。Pが一定の場合、$\dot{P}$はKの増加関数であるから、図1において$\dot{P}=0$をもたらす（K, P）の軌跡をつないだ曲線の右側では $\dot{P}>0$ であり、左側では $\dot{P}<0$ である。

$\hat{K}$と$\hat{P}$はそれぞれ同時に$\dot{K}=0$, $\dot{P}=0$ ならしめる資本と環境汚染量の値、すなわちKおよびPの恒常値である。$\hat{\hat{K}}$は $s\phi(K, 0)-\delta K=0$ の解である。

位相空間は二つの領域、IとIIに分けられる。この二つの間の境界線

は軌道Aである。もしも初期条件が、体系がAの上にあるかあるいは斜線をつけられた領域Ⅱ内にあるようなものであれば、体系は均衡$(\hat{K}, \hat{P})$へ向かって近づかないであろう。その代りにこれらの径路では、環境汚染が投資が減価償却を相殺し得ず、そして資本ストックが減少するほど産出量を少なくするまで、しばらくの間資本と環境汚染量の双方が増大することになる。その後には資本ストックは、環境汚染の発生が自然的減少によって相殺されるほどに少なくなる。したがって環境汚染の水準も同様に下落する。

領域Iにおける軌道Bは均衡すなわち恒常状態$(\hat{K}, \hat{P})$に近づく傾向のある軌道である。領域I内に初期値(K_0, P_0)がある場合は、体系は均衡するであろうことが可能であるように思われるが、均衡に収束しない軌道も存在し得るのである。ある軌道は収束しないで、継続的に均衡のまわりに輪を描くという可能性を除外できないのである。確かに領域Iの外の径路はすでに述べられた如くに収束しないであろうが、同時にすでに示したようにたとえ環境汚染量が社会によって積極的に抑制されなくても、経済は均衡するすなわち恒常状態へ移行するであろうということは可能である。一般に、この恒常状態は最適ではないであろう。それ故に社会は時間を通じてその厚生を極大化するためにその資源を環境汚染の制御にささげることになるのである。

三　Olech の定理の適用

Olech [9] によって証明された次の定理(2)は、動学的経済モデルの均衡の大域的安定性を証明しようとする際に重要である。

自律系

$$(S)\quad \dot{x}=f(x) \qquad [\dot{x}=dx/dt]$$

を考察の対象とする。ここで $x=(x_1,\ x_2)$ であり，$f(x)=(f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))$ はE^2におけるC^1級の関数である。$x=0=(0,\ 0)$ は(S)の特異点であるとする。ヤコービ行列

$$J(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

はE^2の各点で負の実数部分をもつ特性根を有すると仮定する。すなわち

(i) $\mathrm{tr}\ J(x)=\partial f_1/\partial x_1+\partial f_2/\partial x_2<0$ on E^2,

そして

(ii) $\det\ J(x)=(\partial f_1/\partial x_1)(\partial f_2/\partial x_2)-(\partial f_1/\partial x_2)(\partial f_2/\partial x_1)>0$ on E^2,

さらに次の二式のいずれか一方を前提する。(3)

(iii) $(\partial f_1/\partial x_1)(\partial f_2/\partial x_2)\neq 0$ on E^2

(iv) $(\partial f_1/\partial x_2)(\partial f_2/\partial x_1)\neq 0$ on E^2

そうすると(S)の解 $x=0$ は大域において漸近的に安定である。

以上の Olech の定理を前節に解説した Forster [4] のモデルの体系

$$(8)\quad \begin{cases} \dot{K}=s\phi(K,\ P)-\delta K & K(0)=K_0 \\ \dot{P}=g(K)-\alpha P & P(0)=P_0 \end{cases}$$

に適用する。

(8) 式のヤコービ行列は

$$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial K} & \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial P} \\ \dfrac{\partial \dot{P}}{\partial K} & \dfrac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{pmatrix}$$

であり、その要素を構成する偏微係数を計算すると次の如くである。

(15) $\dfrac{\partial \dot{K}}{\partial K}=s\phi_K-\delta$

(16) $\dfrac{\partial \dot{K}}{\partial P}=s\phi_P$

(17) $\dfrac{\partial \dot{P}}{\partial K}=g'(K)$

(18) $\dfrac{\partial \dot{P}}{\partial P}=-\alpha$

$\phi_K>0$, $\phi_P<0$, $g'(K)>0$ であるから、ヤコービ行列の要素の符号は

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}\gtreqless 0 \text{ as } s\phi_K\gtreqless\delta,\quad \frac{\partial \dot{K}}{\partial P}<0,\quad \frac{\partial \dot{P}}{\partial K}>0,\quad \frac{\partial \dot{P}}{\partial P}<0,$$

となる。われわれはここで

$$s\phi_K-\delta<0 \text{ as } K>\bar{K}$$

と仮定すると、符号パターンは

$$\begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

となる。

かくて

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}+\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}<0$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}-\frac{\partial \dot{K}}{\partial P}\frac{\partial \dot{P}}{\partial K}>0$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}\neq 0$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial P}\frac{\partial \dot{P}}{\partial K}\neq 0$$

等の条件は Forster 〔4〕 のモデルで満足されることは明らかであり、故にその体系の均衡値は大域的に安定となる。われわれはこの節の分析では、資本と環境汚染量との間の分離可能性の仮定は全然必要としなかったのである

る。

＊本稿の作成過程において多大の援助を与えられた東京都立大学、奥口孝二助教授の御厚意に感謝したい。

(1) Olech [9] の定理が経済モデルに適用された応用例としては、次の文献があげられる。

Chang, W.W. and Smyth, D.J. "Stability and Instability of *IS*−*LM* Equilibrium", *Oxford Economic Papers*, Vol. 24, No. 3 (Nov., 1972), 372—384.

Garcia G. "Olech's Theorem and the Dynamic Stability of Theories of the Rate of Interest", *Journal of Economic Theory*, Vol. 4, No. 3 (June, 1972) 541—544.

Okuguchi, K. "A Dynamic Model of Firm Entry: Comment", *Review of Economic Studies*, Vol. 39 (4), No. 120 (Oct., 1972) 521—522.

Rau, N. "Two-Class Neoclassical Growth——A Conjecture Proved", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 89, No. 2 (May, 1975) 344—345.

Smith, P.E. "A Note on Metzler's Wealth Effect", *Journal of Political Economy*, Vol. 78, No. 3 (May/June, 1970) 537—539.

Tsiang, S.C. "The Dynamics of International Capital Flows and Internal and External Balance", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 89, No. 2 (May, 1975) 195—214.

(2) n次元への一般化については

Hartman, P. "On Stability in the Large for Systems of Ordinary Differential Equations", *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 13, No. 3 (1961) 480—492.

Markus, L. and Yamabe, H. "Global Stability Criteria for Differential Systems", *Osaka Mathematical*

Journal, Vol. 12, No. 2 (Dec., 1960) 305—317.

等を参照されたい。

(3) Olech [9] p.395 の定理4。

参考文献

[1] D'Arge, R.C. "Essay on Economic Growth and Environmental Quality", *Swedish Journal of Economics*, Vol. 73, No. 1 (March, 1971), 25—41.

[2] D'Arge, R.C. "Economic Growth and the Natural Environment", in Allen V. Kneese and Blair T. Bower (Eds.) *Environmental Quality Analysis : Theory and Method in the Social Sciences* (Published for Resources for the Future, Inc. by The Jonhs Hopkins Press, Baltimore and London, 1972).

[3] D'Arge, R.C. and Kogiku, K.C. "Economic Growth and the Environment", *Review of Economic Studies*, Vol. 15 (1), No. 121 (January, 1973) 61—77.

[4] Forster, B.A. "A Note on Economic Growth and Environmental Quality", *Swedish Journal of Economics*, Vol. 74, No. 2 (June, 1972) 281—285.

[5] Forster, B.A. "A Note on the Optimal Control of Pollution", *Journal of Economic Theory*, Vol. 5, No. 3 (December, 1972) 537—539.

[6] Forster, B.A. "Optimal Capital Accumulation in a Polluted Environment", *Southern Economic Journal*, Vol. 39, No. 4 (April, 1973) 544—547.

〔7〕 Lecomber, R., *Economic Growth versus the Environment* (Macmillan Press Ltd, London and Basingstoke, 1975).

〔8〕 Mäler, Karl-Göran, *Environmental Economics : A Theoretical Inquiry* (Published for Resources for the Future, Inc. by The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1974).

〔9〕 Olech, C. "On the Global Stability of an Autonomous System on the Plane", *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1, No. 3, (1963), 389—400.

〔10〕 Victor, P.A., *Economics of Pollution* (Macmillan Press Ltd, London and Basingstoke, 1972).