一般化されたトービン・モデルの安定性について*

吉岡守行

一 はじめに

Hadjimichalakis 〔3〕、〔4〕は貨幣的成長に関するトービン・モデルを一般化したモデルを提示し、Routh-Hurwitz の条件に依拠して短期および長期の安定条件を検討した。本稿の目的は Hadjimichalakis 〔4〕の長期モデルの安定条件を Fuller 〔2〕の定理を適用して導出することにある。

二 安定分析

われわれが分析しようとする Hadjimichalakis 〔4〕の長期モデルは次のようなものである。(1)

(1) $dk/dt=sf(k)-(1-s)(\theta-q)m-nk$

(2) $dm/dt=m[\theta-\varepsilon\{m-L(f'(k)+q)\}-q-n]$

(3) $dq/dt=\gamma\varepsilon[m-L(f'(k)+q)]$

(1)、(2)、(3)を均衡点の近傍でテイラー展開し2次以上の項を無視すれば

$$\frac{dk}{dt}=\frac{dk^*}{dt}+(sf'-n)(k-k^*)-(1-s)n(m-m^*)+(1-s)m^*(q-q^*) \tag{4}$$

$$\frac{dm}{dt}=\frac{dm^*}{dt}+\varepsilon m^*L'f''(k-k^*)-\varepsilon m(m-m^*)+m(\varepsilon L'-1)(q-q^*) \tag{5}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq^*}{dt}-\gamma\varepsilon L'f''(k-k^*)+\gamma\varepsilon(m-m^*)-\gamma\varepsilon L'(q-q^*) \tag{6}$$

を得る。ここですべての微係数の値は均衡点でのそれである。(4)、(5)、(6)の体系を行列形式で表示すると

$$\begin{bmatrix} d(k-k^*)/dt \\ d(m-m^*)/dt \\ d(q-q^*)/dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sf'-n & -(1-s)n & (1-s)m^* \\ \varepsilon m^*L'f'' & -\varepsilon m^* & m^*(\varepsilon L'-1) \\ -\gamma\varepsilon L'f'' & \gamma\varepsilon & -\gamma\varepsilon L' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k-k^* \\ m-m^* \\ q-q^* \end{bmatrix} \tag{7}$$

となる。(7)の係数行列を $\varDelta\equiv[\delta_{ij}]$ とする。

(7)の安定条件は次の(8)で示されるような3変数の定係数微分方程式体系の安定性に関する Fuller〔2〕の定理を適用することによって導出できる。

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

(8)の係数行列をAとする。

定理1 (Fuller 〔2〕)：(8)の原点の安定の必要かつ十分条件は、次の(9.a)、(9.b)、(9.c)が同時に成立することである。

(9. a) $trA=a_{11}+a_{22}+a_{33}<0,$

(9. b) $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0,$

(9. c) $|A_1|\equiv\begin{vmatrix} a_{22}+a_{11} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{33}+a_{11} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{33}+a_{22} \end{vmatrix}<0.$

定理1を(7)に適用するために次の計算をする。

(10) $tr\Delta=-\varepsilon\gamma\{(m^*/\gamma+L')-(sf'-n)/\varepsilon\gamma\}$

(11) $|\Delta|=-\varepsilon\gamma m^*\{-(sf'-n)+(1-s)nL'f''\}$

(12) $|\Delta_1|\equiv\begin{vmatrix} \delta_{22}+\delta_{11} & \delta_{23} & -\delta_{13} \\ \delta_{32} & \delta_{33}+\delta_{11} & \delta_{12} \\ -\delta_{31} & \delta_{21} & \delta_{33}+\delta_{22} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} sf'-n-\varepsilon m^* & m^*(\varepsilon L'-1) & -(1-s)m \\ \gamma\varepsilon & sf'-n-\gamma\varepsilon L' & -(1-s)n \\ \gamma\varepsilon L'f'' & \varepsilon m^* L' f'' & -\varepsilon m^*-\gamma\varepsilon L' \end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon L'm^*\begin{vmatrix} \left(\dfrac{sf'-n}{m^*}-\varepsilon\right) & \varepsilon L'-1 & -(1-s) \\ \gamma\varepsilon & sf'-n-\gamma\varepsilon L' & -(1-s)n \\ \gamma f'' & m^*f'' & -\left(\dfrac{m^*}{L'}+\gamma\right) \end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon L'm^*\left[\frac{(sf'-n)\left(\dfrac{m^*}{L'}+\gamma\right)}{m}\left\{L'\varepsilon\left(\frac{m^*}{L'}+\gamma\right)-(sf'-n)\right\}\right.$$
$$\left.-\varepsilon\left(\frac{m^*}{L'}+\gamma\right)\{(1-s)f''L'(\gamma+n)+\gamma\}+(1-s)f''\{(\gamma+n)(sf'-n)+n\gamma\}\right]$$

$L'(f'(k)+q)<0$, $f''<0$ であるから，均衡において

(13) $sf'-n\overset{(2)}{<}0$

を仮定し，さらに

(14) $\dfrac{m^*}{L'}+\gamma<0$

と想定すると，(10)，(11)，(12)より $tr\varDelta<0$, $|\varDelta|<0$, $|\varDelta_1|<0$ となることは明白である。よって次の定理が成立す

る。

定理2：⒀、⒁を仮定すると、一般化されたトービン・モデルの長期均衡は（局所的に）安定である。

三　結　　語

Hadjimichalakis〔3〕、〔4〕は $k=\bar{k}$, $n=0$ の場合、即ち短期の安定条件として

（α）　$\varepsilon<-1/L'$　　for $\gamma=\infty$ and $\varepsilon<\infty$,

（β）　$\gamma<-m^*/L'$　for $\gamma<\infty$ and $\varepsilon=\infty$,

をあげている。(β)はわれわれの⒁に対応する。しかし⒁は $\varepsilon=\infty$を仮定していない。さらにわれわれの場合は(α)の条件を必要としないのである。

＊本稿に対して与えられた東京都立大学、奥口孝二教授の御教示に対し深く感謝したい。

（1）このモデルの説明については Hadjimichalakis〔4〕pp. 382—388 および pp. 395—396 を参照されたい。

（2）この条件は Hadjimichalakis も仮定している。Hadjimichalakis〔4〕p. 398 を参照されたい。

参考文献

〔1〕Cagan, P. "The Monetary Dynamics of Hyperinflation", in Friedman, M. (ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money* (University of Chicago Press, Chicago, 1956).

〔2〕Fuller, A. J. "Conditions for a Matrix to Have Only Characteristic Roots with Negative Real Parts", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23 (1968), 71—98.

〔3〕 Hadjimichalakis, M. G. "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money—the Tobin Models", *Review of Economic Studies*, 38 (1971), 457—479.

〔4〕 Hadjimichalakis, M. G. "Money, Expectations and Dynamics—An Alternative View", *International Economic Review*, 12 (1971), 381—402.

〔5〕 Okuguchi, K. "Stability of a Three Variable System of Differential Equations", forthcoming in *Review of Economic Studies*.

〔6〕 Sidrauski, M. "Inflation and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, 75 (1967), 796—810.

〔7〕 Sijben, Jac. J. *Money and Economic Growth* (H. E. Stenfert Kroese B. V., Leiden, the Netherlands, 1976).

〔8〕 Stein, J. L. "Monetary Growth Theory in Perspective", *American Economic Review*, 60 (1970), 85—106.

〔9〕 Tobin, J. "Money and Economic Growth", *Econometrica*, 33 (1965), 671—684.

〔10〕 Tobin, J. "The Neutrality of Money in Growth Models: A Comment", *Economica*, 34 (1967), 69—72.