有限資源の最適供給量と最適価格*

吉岡守行

一　はじめに

Tripi [16] は資源供給者が全資源量一定という制約条件のもとで、ゼロ時点から無限大のかなたまでの総収入(1)の合計額の現在価値を最大ならしめるという問題を需要関数を特定化し離散型モデルで定式化し、最適供給量と最適価格の明示的な解を求め、そしてその解にもとづいて(a)、(b)、(c)という三つの命題を提示した。しかしその最後の命題・(c)は誤っている。本稿ではこのことを明らかにする。

また離散型モデルに対して連続型モデルによって Trippi [16] によってなされていないところの全資源賦存量が変化した場合、最適供給量と最適価格にどのような影響が及ぼされるかという問題をも分析する。

二　離散型モデル・I

簡単化のため資源供給の費用は無視しうるほどのものであり、また需要の価格弾力性が一定であるタイプの需

要関数を仮定する。

需要関数の逆関数は次式で表わされる。

(2. 1)　　$p_t = aq_t^{1/E}$　　　$a>0,\ E<0$

ここで p_t は t 時点の価格、q_t は t 時点の需要量、E は需要の価格弾力性を示す。

任意の t 時点の総収入は

(2. 2)　　$aq_t^{1/E+1}$

で与えられる。

限界収入（MR）は正でなければならないから

(2. 3)　　$MR(t) = a(1/E+1)q_t^{1/E} > 0$[2]

の成立が要請される。

(2.3)が成り立つためには

(2. 4)　　$E > -1$

を前提としなければならない。

資源供給者の目的は全資源量一定という制約条件のもとで、ゼロ時点から無限大のかなたまでの総収入の合計額の現在価値を最大ならしめることであるとする。

この問題の数学的定式化は、次の如くである。

$$\text{maximize}: \sum_{t=0}^{\infty} a q_t^{1/E+1}(1+r)^{-t}$$

$$\text{subject to}: \sum_{t=0}^{\infty} q_t = Q$$

$$q_t \geq 0 \qquad t=1,\ 2, \cdots\cdots,\ \infty$$

ここで Q は有限な全資源量で r は時間割引率を表わす。

最大のための必要条件は

$$(2.\ 5) \qquad a(1/E+1)q_t^{*1/E}(1+r)^{-t}-\lambda=0 \qquad \text{for } t=1,\ 2, \cdots\cdots,\ \infty$$

である。

(2.5) を変形すると

$$(2.\ 6) \qquad \lambda=a(1/E+1)q_t^{*1/E}(1+r)^{-t}$$

を得るから、(2.6) に (2.3) または (2.4) を考慮すると λ は正となる。Trippi [16] が λ は負の乗数であると述べているのは誤りである。(3)

(2.5) を q_t^* について解くと

$$(2.\ 7) \qquad q_t^*=\left(\frac{\lambda(1+r)^t}{a(1/E+1)}\right)^E$$

となる。[4]

(2.1)と(2.7)から

(2. 8) $$p_t^* = \frac{\lambda(1+r)^t}{1/E+1}$$

を得る。

(2. 9) $$K = \left(\frac{\lambda}{a(1/E+1)}\right)^E$$

および

(2.10) $$K' = \frac{\lambda}{1/E+1}$$

とすると、(2.7)と(2.8)は

(2.11) $$q_t^* = K(1+r)^{tE}$$

(2.12) $$p_t^* = K'(1+r)^t$$

と表わすことができる。

(2.11)と(2.12)の両式より次の（a）、（b）二つの命題が得られる。

（a） ここで与えられた条件のもとでは、価格は資源供給者によって採用された時間割引率に等しい一定率で

時間を通じて上昇する。この価格上昇率は需要の価格弾力性とは全く無関係である。

（b）供給量は時間割引率と比例して時間を通じて減少する。需要の価格弾力性が大となればなるほど、それだけ一層供給量の減少率は大となる。

三　離散型モデル・Ⅱ

本節では任意の価格水準のもとで、需要量が一定率αで時間を通じて増大あるいは減少するというタイプの需要関数を前提として議論を展開することにする。

需要量が一定率で増大する場合については特に説明を要しないと思われるが、他方減少する場合はたとえば研究開発などの結果、当該資源に代替物が出来た時などに考えられるのである。[5]

需要関数は

(3. 1)　$q_t=(1/a^E)p_t^E(1+\alpha)^t$　　$\alpha>0$ or $\alpha<0$

と表わされる。[6] ここでαは正または負の値をとるが、ただし

(3. 2)　$\alpha>-1$

とする。

需要関数の逆関数は次のようになる。

(3. 3)　$p_t=aq_t^{1/E}(1+\alpha)^{-t/E}$

したがって総収入は

(3. 4)　　$aq_t^{1/E+1}(1+\alpha)^{-t/E}$

で示される。

資源供給者の目的は前節と同様とすると，問題は次のように定式化される。

maximize : $\sum_{t=0}^{\infty} aq_t^{1/E+1}(1+\alpha)^{-t/E}(1+r)^{-t}$

subject to : $\sum_{t=0}^{\infty} q_t = Q$

$q_t \geq 0 \qquad t=1,\ 2, \cdots\cdots,\ \infty$

最大のための必要条件は

(3. 5)　　$a(1/E+1)q_t^{*1/E}(1+\alpha)^{-t/E}(1+r)^{-t}-\lambda=0 \qquad \text{for } t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ \infty$

である。

(3.5)をq_t^*について解くと

(3. 6)　　$q_t^* = \left[\dfrac{\lambda}{a(1/E+1)}\right]^E (1+r)^{Et}(1+\alpha)^t$

となる。(3.6)に(2.9)を考慮すると

(3. 7)　　$q_t^* = K(1+r)^{Et}(1+\alpha)^t$

と簡潔に表現される。

また(3.3)、(3.7)、(2.10)より

(3.8)　$p_t^*=K'(1+r)^t$

を得る。Trippi[16]では、(3.8)に対応する式すなわちq_t^*が(3.7)で与えられた場合のp_t^*の解の式は

(3.9)　$p_t^*=K'(1+r)^t(1+\alpha)^{-t/E}$

となっている。そして(3.9)を基礎として

(c)　価格の上昇率は $r-\alpha/E$ である。

という命題が述べられている。しかしわれわれの(3.8)によると(3.9)したがって命題(c)は誤りである。

われわれの命題は前節の結果をも考慮して

(A)　最適価格はαの正、負、ゼロにかかわらず一定率rで上昇する。

となるのである。

四　離散型モデル・III

この節では今まで無視してきた資源供給の際の費用を考慮したモデルを問題とする。

総収入の式は

(2.2)　$aq_t^{1/E+1}$

で与られるとする。

費用関数としては

(4. 1)　$C=cq_t$

で表わされるタイプのものを採用する。

問題は

$$\text{maximize}\ :\ \sum_{t=0}^{\infty}(aq_t^{1/E+1}-cq_t)(1+r)^{-t}$$

$$\text{subject to}\ :\ \sum_{t=0}^{\infty}q_t=Q$$

$$q_t \geq 0 \qquad t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ \infty$$

のように定式化される。

必要条件は

(4. 2)　$(a(1/E+1)q_t^{*1/E}-c)(1+r)^{-t}-\lambda=0$　　for $t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ \infty$

である。

(4.2)を変形すると

(4. 3)　$a(1/E+1)q_t^{*1/E}-c=\lambda(1+r)^t$

となるから、(4.2)は Gordon-Scott の結果

(4.4) $M\Pi(t) \equiv MR(t) - MC(t) = \lambda(1+r)^t$

を示している。こで$M\Pi$は限界利潤、MCは限界費用である。

(4.2)をq_t^*について解くと

(4.5) $q_t^* = \left(\dfrac{\lambda(1+r)^t + c}{a(1/E+1)}\right)^E$

が導かれ、(4.5)、(2.1)、(2.10)より

(4.6) $p_t^* = \dfrac{\lambda(1+r)^t + c}{1/E+1} = K'(1+r)^t + c/(1/E+1)$

を得る。

かくて費用を考慮した場合は、最適供給量および最適価格に関する命題を述べようとすれば、二節、三節のそれらよりも複雑なものとなることが分かる。

五　連続型モデル・I

本節では総収入の式が(2.2)式で与えられる場合の連続型モデルを考察する。

問題は

maximize : $\int_0^\infty a q_t^{1/E+1} e^{-rt}$

subject to : $\int_0^\infty q_t = Q$

と表示される。これは変分法の等周問題であり、次の式

(5. 1) $\int_0^\infty (a q_t^{1/E+1} e^{-rt} - \lambda q_t)\, dt$

のオイラー方程式を計算すれば、極値の必要条件を求めることができる。それは次のように示される。

(5. 2) $a(1/E+1) q_t^{*1/E} e^{-rt} - \lambda = 0$

(5.2) から q_t^* の解を求めれば

(5. 3) $q_t^* = \left(\dfrac{\lambda e^{rt}}{a(1/E+1)} \right)^E = K e^{rt}$

を得ることができ、(5.3)、(2.1) 等より

(5. 4) $p_t^* = \dfrac{\lambda e^{rt}}{1/E+1} = K' e^{rt}$

が求められる。

次に Q が変化した場合、q_t^*、p_t^* にどのような影響が及ぼされるかを分析する。

(5. 6)　$\int_0^\infty q_t^* = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{a(1/E+1)}\right]^E e^{E'rt}dt = Q$

が成立する。(5.6)を計算すると

(5. 7)　$\lambda = a(1/E+1)(E'rQ)^{1/E}$

となる。ここで $E' = -E > 0$ である。

次に(5.7)の両辺をQで微分すると

(5. 8)　$\frac{\partial\lambda}{\partial Q} = a(1/E+1)(E'r)^{1/E}Q^{1/E-1}E^{-1} < 0$

という結果を得る。また(5.3)、(5.4)の両辺をλで微分すると

(5. 9)　$\frac{\partial q_t^*}{\partial\lambda} = E\left(\frac{\lambda}{a(1/E+1)}\right)^{E-1} e^{E'rt} < 0$

(5.10)　$\frac{\partial p_t^*}{\partial\lambda} = \frac{1}{(1/E+1)} e^{rt} > 0$

となる。かくて次の命題が成立する。

（B）　有限の全資源量が増加（減少）すると最適供給量は増加（減少）し、最適価格は下落（上昇）する。

六　連続型モデル・Ⅱ

ここでのモデルでは次の需要関数を採用する。

(6. 1)　$q_t=(1/a^E)p_t^E e^{\alpha t}$

(6.1) を p_t に関して解くと

(6. 2)　$p_t=aq_t^{1/E}e^{-\alpha/Et}$

が導かれる。

　したがって問題は次のように定式化される。

maximize : $\int_0^\infty aq_t^{1/E+1}e^{-(r+\alpha/E)}dt$

subject to : $\int_0^\infty q_t dt=Q$

これは前節と同じく変分法の等周問題であるから

(6. 3)　$\int_0^\infty (aq_t^{1/E+1}e^{-(r+\alpha/E)t}-\lambda q_t)dt$

のオイラー方程式が、問題の極値の必要条件になる。それを計算すると

(6. 4)　$a(1/E+1)q_t^{*1/E}e^{-(r+\alpha/E)t}-\lambda=0$

を得る。(6.4) から q_t^* の解

(6. 5)　$q_t^*=\left[\dfrac{\lambda}{a(1/E+1)}\right]^E e^{(Er+\alpha)t}=Ke^{(Er+\alpha)t}$

が求められる。(6.2)と(6.5)から

(6. 6) $$p_t^* = \left[\frac{\lambda}{(1/E+1)}\right]e^r = K' e^{rt}$$

を導出することができる。

(6. 7) $$\int_0^\infty q_t^* = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{a(1/E+1)}\right]^E e^{(Er+\alpha)t}dt = Q$$

が成り立つ。積分計算を行うと

(6. 8) $$\lambda = a(1/E+1)\{-(Er+\alpha)\}^{1/E}Q^{1/E}$$

が得られる。かくて次の三つの式を求めることができ

(6. 9) $$\frac{\partial\lambda}{\partial Q} = a(1/E+1)\{-(Er+\alpha)\}^{1/E}Q^{1/E-1}E^{-1} < 0$$

(6.10) $$\frac{\partial q_t^*}{\partial\lambda} = E\left[\frac{\lambda}{a(1/E+1)}\right]^{E-1} e^{(Er+\alpha)t} < 0$$

(6.11) $$\frac{\partial p_t^*}{\partial\lambda} = \frac{1}{(1/E+1)}e^{rt} > 0$$

前節の命題(B)の成立が本節でも確認できるのである。

七　連続型モデル・Ⅲ

次に資源の供給費用を考慮した場合の連続型モデルの問題は、(2.1)、したがって(2.2)とさらに(4.1)を前提とした場合

maximize : $\int_0^\infty (aq_t^{1/E}-cq_t)e^{-rt}dt$

subject to : $\int_0^\infty q_t dt=Q$

となる。これは

(7.1)　$\int_0^\infty \{(aq_t^{1/E+1}-cq_t)e^{-rt}-\lambda q_t\}dt$

のオイラー方程式を問題とすれば、極値の必要条件を得る。それは

(7.2)　$(a(1/E+1)q_t^{*1/E}-c)e^{-rt}-\lambda=0$

である。(7.2)は四節と同様に Gordon-Scott の結果

(7.3)　$M\Pi(t)=MR(t)-MC(t)=\lambda e^{rt}$

を示している。

(7.2)をq_t^*に関して解くと

(7.4)　$q_t^* = \left[\dfrac{\lambda e^{rt}+c}{a(1/E+1)}\right]^E$

が導かれる。

(7.4)、(2.1) より

(7.5)　$p_t^* = \dfrac{\lambda}{1/E+1} e^{rt} + \dfrac{1}{1/E+1} c = K' e^{rt} + c/(1/E+1)$

を得るのである。

＊　本稿に対して与えられた東京都立大学、奥口孝二教授の数々の御教示に対し深く感謝したい。

（1）　期間を無限大のかなたまで考えているが、資源がある有限の時点Tまでに枯渇してしまう場合には、時間がTを過ぎた時には資源の供給量はゼロとなると考えればよい。このことについては Hotelling [7] p. 147 を参照されたい。

（2）　この条件を Trippi [16] は考慮していない。

（3）　Trippi [16] p. 405 を参照されたい。

（4）　Trippi [16] では、ここでの (2.7) にあたる式は

$$q_t^* = \left(\frac{\lambda(1+r)^t}{a(1/E+1)}\right)^E (1+r)^{tE}$$

となっているが、これはミスプリントである。

（5）　この点については Hotelling [7]、Hanson [6] 等を参照されたい。なお Trippi [16] は増大する場合しか考えてい

ない。

(6) なおここでは積の形の需要関数を問題としているが，和の形をとる需要関数も考えられる。Hotelling [16] を参照されたい。

参 考 文 献

[1] Cummings, R.G. and Burt, O.R. "The Economics of Production from Natural Resources: Note", *American Economic Review*, Vol. 59, No. 5 (December 1969), 985~990.

[2] Elsgolc, L.E., *Calculus of Variations* (Pergamon Press, London, New York, 1961).

[3] Fox, C., *An Introduction to the Calculus of Variations* (Oxford University Press, London, 1963).

[4] Gordon, R.L. "Conservation and the Theory of Exhaustible Resources", *Canadian Journal of Economics and Political Science*, Vol. 32, No. 3 (August 1966), 319~326.

[5] Gordon, R.L. "A Reinterpretation of the Pure Theory of Exhaustion", *Journal of Political Economy*, Vol. 75, No. 3 (June 1967), 274~286.

[6] Hanson, D.A. "Efficient Transitions from a Resource to a Substitute Technology in an Economic Growth Context", *Journal of Economic Theory*, Vol. 17, No. 1 (February 1978), 99~113.

[7] Hotelling, H. "The Economics of Exhaustible Resources", *Journal of Political Economy*, Vol. 30, No. 2 (April 1931), 137~175.

[8] Lehvhari, D. and Liviatan, N. "Notes on Hottelling's 'Economics of Exhaustible Resources", *Canadian Journal of Economics*, Vol. 10, No. 2 (May 1977), 177~192.

[9] McRae, J.J. "On the Stability of Non-Replenishable Resource Prices", *Canadian Journal of Economics*, Vol. 11, No. 2 (May 1978), 287〜299.

[10] Schulze, W.D. "The Optimal Use of Non-Renewable Resources : The Theory of Extraction", *Journal of Environmental Economics and Management*, Vol. 1, No. 1 (May 1974), 53〜73.

[11] Scott, A. "The Theory of the Mine Under Conditions of Certainty", in Gaffney, M. (ed.), *Extractive Resources and Taxation* (University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1967), 25〜62.

[12] Solow, R.M. "The Economics of Resources or the Resources of Economics", *American Economic Review*, Papers and Proceedings, Vol. 64, No. 2 (May 1974), 1〜14.

[13] Stiglitz, J.E. "Growth with Exhaustible Natural Resources : The Competitive Economy", *Review of Economic Studies*, Smposium on the Economics of Exhaustible Resources (1974), 139〜152.

[14] Stiglitz, J.E. "Monopoly and the Rate of Exhaustible Resources", *American Economic Riview*, Vol. 66, No. 4 (September 1976), 655〜661.

[15] Sweeney, J.L. "Economics of Depletable Resources : Market Forces and Intertemporal Bias", *Review of Economic Studies*, Vol. 44(1), No. 136 (February 1977), 125〜141.

[16] Trippi, R.R. "Optimal Intertemporal Pricing Strategies for Suppliers of Finite Resources or Why the Oil Rich Nations Behave the Way They Do", *Kyklos*, Vol. 28, Fasc. 2 (1975), 404〜406.