4次元多様体上の周期作用の構成

松　江　広　文

序

4次元多様体 (4-manifold) $\tilde{M}$の上に，半自由周期作用 (semi-free periodic action) を構成する。周期作用の不動点 (fixed point) の集合は2次元閉曲面 (closed 2-surface) Fである。周期作用による軌道空間(orbit space) をMとする。周期作用の周期 (period) をpとする。

このとき，構成方法と〔2〕の結果から，次の制限を受ける。

$\dim H_2(\tilde{M};\ \boldsymbol{R})=2(pq-1)(m-1)(n-1)$

Fの種数 (genus)$=(m-1)(n-1)$

$\dim H_2(M;\ \boldsymbol{R})=2(q-1)(m-1)(n-1).$

ここで，$\dim H_2(\tilde{M};\ \boldsymbol{R})$，$\dim H_2(M;\ \boldsymbol{R})$ は，$\tilde{M}$，Mの実数係数2次元ホモロジー群 (real coefficient 2-dimensional homology group) の次元で，q，m，n は任意の自然数である。

構成方法は〔3〕,〔4〕と同様に, Brieskorn 多様体の性質を用いる。Brieskorn 多様体について詳しくは〔5〕を参照されたい。

1　構成方法

まず，多項式

$f(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)=z_1^l+z_2^m+z_3^n+z_4^2$

を考える。ただし，z_j は複素変数である。

$S^7=\{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\ ;\ |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2=1\}$

とし，Brieskorn 多様体 $f^{-1}(0)\cap S^7$ を K^5 とおくと，次の事実がある。

$K^5 \cap \{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\ ;\ \mathrm{Im}\, z_4=0\} = \tilde{M}(l,\ m,\ n)$

は，４次元微分可能閉多様体（closed smooth 4-manifold）である。ただし，$\mathrm{Im}\, z_4$ は z_4 の虚数部分とする。

証明　$K(l,\ m,\ n) = K^5 \cap \{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\ ;\ z_4=0\}$

とおく。$\psi\colon K^5 - K(l,\ m,\ n) \longrightarrow S^1$ を

$$\psi(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = \frac{z_4}{|z_4|}$$

により定義する。ψ は smooth fibering である。

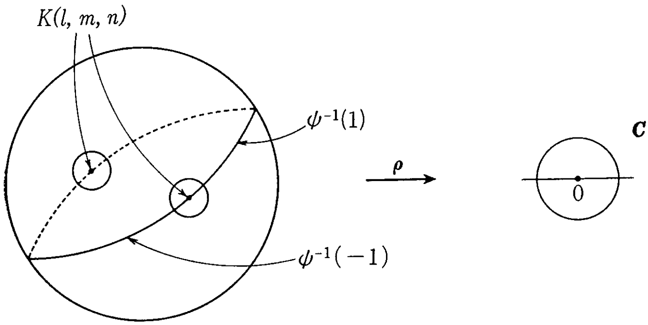
K^5 の元 $(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ が $\tilde{M}(l,\ m,\ n)$ の元であるための必要十分条件は，

$z_4=0$ または $\psi(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)=\pm 1$

である。すなわち，

$\tilde{M}(l,\ m,\ n) = \psi^{-1}(1) \cup K(l,\ m,\ n) \cup \psi^{-1}(-1)$

である（図)。



$\rho\colon K^5 \longrightarrow \boldsymbol{C}$ を

$$\rho(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = z_4$$

により定義すると，$\boldsymbol{C} \ni 0$ は ρ の regular value であることがわかる。

従って，$\rho^{-1}(0)=K(l,\ m,\ n)$ の近傍の状態（図）より，$\tilde{M}(l,\ m,\ n)$ は微分可能閉多様体である。

つぎに，$\phi^{-1}(1)$，$\phi^{-1}(-1)$ の閉包（closure）をそれぞれ $\overline{\phi^{-1}(1)}=W$, $\overline{\phi^{-1}(-1)}=W'$ とおくと，

$$\tilde{M}(l,\ m,\ n)=W\cup W',\quad W\cap W'=K(l,\ m,\ n)$$

である。

一方，〔3〕の結果より，ϕ の fiber は ϕ: $S^5-K(l,\ m,\ n)\longrightarrow S^1$ の Milnor fiber に同位相である。

従って，W と W' のホモトピー型（homotopy type）は，$(l-1)(m-1)(n-1)$ 個の S^2 の花束（bouquet）$S^2\vee\cdots\cdots\vee S^2$ になる。

$\tilde{M}(l,\ m,\ n)$，W，W' はそれぞれ単連結（simply connected）だから，

$$\dim H_3(\tilde{M}(l,\ m,\ n)\,;\ \boldsymbol{R})=0,$$

$$\dim H_1(W;\ \boldsymbol{R})\oplus H_1(W';\ \boldsymbol{R})=0.$$

また，$\dim H_2(W;\ \boldsymbol{R})=\dim H_2(W';\ \boldsymbol{R})=(l-1)(m-1)(n-1)$.

また，ポアンカレの双対性（Poincaré duality）より，

$$\dim H_2(K(l,\ m,\ n)\,;\ \boldsymbol{R})=\dim H_1(K(l,\ m,\ n)\,;\ \boldsymbol{R}).$$

従って，次の完全系列（exact sequence）

$$\to H_3(\tilde{M}(l,m,n)\,;\boldsymbol{R})\to H_2(K(l,m,n)\,;\boldsymbol{R})\to H_2(W;\boldsymbol{R})\oplus H_2(W';\boldsymbol{R})$$
$$\to H_2(\tilde{M}(l,m,n)\,;\boldsymbol{R})\to H_1(K(l,m,n)\,;\boldsymbol{R})\to H_1(W;\boldsymbol{R})\oplus H_1(W';\boldsymbol{R})\to$$

より，

$$\dim H_2(\tilde{M}(l,\ m,\ n)\,;\ \boldsymbol{R})=2(l-1)(m-1)(n-1)$$

が得られる。

特に，$l=pq$ とおく。h: $\tilde{M}(l,\ m,\ n)\longrightarrow\tilde{M}(l,\ m,\ n)$ を，

$$h(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)=(e^{\frac{2\pi i}{p}}z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$$

と定義すると，h は周期 p の微分同相写像（diffeomorphism）である。

h の不動点集合は $\tilde{M}(l,\ m,\ n)\cap\{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\,;\ z_1=0\}$ である。

これを $F(m,\ n)$ とおき，また，$W\cap\{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\ ;\ z_1=0\}$ を V，$W'\cap\{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\ ;\ z_1=0\}$ を V'，$K(l,\ m,\ n)\cap\{(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)\ ;\ z_1=0\}$ を $K(m,\ n)$ とおけば，

$$F(m,\ n)=V\cup V',\quad V\cap V'=K(m,\ n).$$

前と同様に〔3〕より，V と V' のホモトピー型は $(m-1)(n-1)$ 個の S^1 の花束 $S^1\vee\cdots\vee S^1$ になる。

〔5〕より，$K(m,\ n)$ は S^3 内の S^1 の結び目 (knot) あるいは，m，n の最大公約数個の S^1 の絡み目 (link) である。従って，

$F(m,\ n)$ のオイラー標数 (Euler number)

$=1-(m-1)(n-1)+1-(m-1)(n-1)$

$=2-2(m-1)(n-1).$

故に，$F(m,\ n)$ の種数$=(m-1)(n-1).$

2　結　論

1では，単連結微分可能4次元多様体$\tilde{M}(l,\ m,\ n)$ 上に，周期pの微分同相写像hを構成した。hは求める半自由周期作用の生成元である。この周期作用による軌道空間Mもまた単連結微分可能4次元多様体である。

次に〔2〕の結果を用いて，$\dim H_2(M;\ \boldsymbol{R})$ の計算を行う。

$l=pq$ より，

$$\dim H_2(\tilde{M}(l,\ m,\ n)\ ;\ \boldsymbol{R})=2(pq-1)(m-1)(n-1),$$

また，周期作用の不動点集合 $F(m,\ n)$ の種数は $(m-1)(n-1)$ であった。

〔2〕の結果より，$b=\dim H_2(M;\ \boldsymbol{R})$ とおけば，以上の条件の下で次の等式が成り立つ。

$$2(pq-1)(m-1)(n-1)=2(p-1)(m-1)(n-1)+pb.$$

従って，

$$pb=2(m-1)(n-1)(pq-p),$$

故に，　　$b=2(q-1)(m-1)(n-1)$,

すなわち，$\dim H_2(M; \boldsymbol{R})=2(q-1)(m-1)(n-1)$

である。

以上で，序に述べた周期作用が構成された。

3　注意

1. 周期を l，すなわち $q=1$，とすると，$\dim H_2(M; \boldsymbol{R})=0$ より，M は4次元ホモトピー球面（homotopy 4-sphere）である。

2. $\tilde{M}$，M の構成から，

$$\operatorname{sign}(\tilde{M})=0,\ \operatorname{sign}(M)=0$$

がいえる。従って，〔1〕の公式

$$\operatorname{sign}(\tilde{M})=p\cdot\operatorname{sign}(M)-\frac{p^2-1}{3p}(F\circ F)$$

より，$M\supset F$ の自己交点数（self-intersection number）$F\circ F$ は0である。

References

〔1〕 Hirzebruch, F.: The signature of ramified coverings, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, Univ. of Tokyo Press, Princeton Univ. Press, 1969, 253—265.

〔2〕 Hsiang, W. C. & R. H. Szczarba: On embedding surfaces in four-manifolds, Proc. of Symp. Pure Math. 22, 1971, 97—103.

〔3〕 Matsue, H.: Fibering over a circle and its application, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 20, 1973, 21—24.

〔4〕 松江広文：4次元実射影空間について，成城大学経済学部創立30周年記念論文集，1980, 729—732.

〔5〕 Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies, 61, Princeton Univ. Press, 1968.