Banach 空間における微分（Ⅰ）

関　本　年　彦

序

Banach 空間における微分は，関数空間を扱うのに役立つほか，Euclid 空間の多変数関数の微分について見通しのよい鳥瞰が得られる利点がある。

既に，H. Cartan〔3〕, S. Lang〔4〕等の中に優れた解説があるが，和文の成書は未だ見当らないので敢て解説を試みた次第である。もとより，数学的に新しい内容は何も含んでいないが，有限増分の定理の証明に際して無限次元線形空間の取扱いに基本的な Hahn-Banach の定理を用いてみた，これは，本文中にも触れておいた F. and R. Nevalinna〔5〕, R. Abraham and J. E. Marsden〔2〕による Euclid 空間の有限増分の定理の証明法を無限次元線形空間の場合に翻訳した形になっており，一つの自然な証明法であるように思う。

本稿は本誌に掲載する一回の分量としては多過ぎてしまい，全体を（Ⅰ），（Ⅱ）に分割して二回に分けて掲載して頂くことにした。その結果，本論に当る Banach 空間における微分の解説は（Ⅱ）で行い，（Ⅰ）ではそのための準備を述べている。

本学の松江教授には，本稿に関連する議論にお付合い頂き，益する処が多かった。お礼を申し上げる。

本稿は，成城大学教員特別助成による研究の一部であることを付記する。

第１章　ノルム空間の基本事項

本稿で扱う線形空間はすべて実数体 $\mathbf{R}$ 上のものである。

この章における関数解析にかかわる諸事項の論述は，主として伊藤清三・小松彦三郎〔1〕の第3章に負っている。

§1 Banach 空間の定義

E を実数体 $\mathbf{R}$ 上の線形空間とする。E 上の関数 $x \mapsto |x| \in \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ は実数 $\geqslant 0$ の集合) で以下の性質を満たすものを**ノルム**という：

N1 $x=\bar{0} \Longleftrightarrow |x|=0$;

N2 $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ (三角不等式);

N3 $|xt|=|t||x|$。

ここで x, y はEの任意の元，t は任意の実数である。性質 N1，N2，N3 を**ノルムの公理**という。

ノルムが指定された線形空間を**ノルム空間**という。ノルム空間には $|x-y|$ により距離が定義される。三角不等式から直ちに $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$ を得るが，これからノルムは連続（さらに，一様連続）であることがわかる。

命題 1. 1. 1 E, F をノルム空間，f: $E \to F$ を一様連続である写像とする。(x_n) $(0 \leqslant n)$ を E の Cauchy 列とすると，$(f(x_n))$ $(0 \leqslant n)$ は F の Cauchy 列となる。

〔証明〕 f の一様連続性により，任意の実数 $\varepsilon>0$ に対し

$$|x-y| \leqslant r \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

であるような実数 $r>0$ が存在する。(x_n) が Cauchy 列であることから，ある整数 $n_0>0$ により，整数 $n \geqslant n_0$, $k \geqslant 0$ に対して $|x_{n+k}-x_n| \leqslant r$ が成り立つので，このとき $|f(x_{n+k})-f(x_n)| \leqslant \varepsilon$ となる。□

§2 連続線形写像

E，Fをノルム空間とする。

定理 1. 2. 1 線形写像 $f\colon E\to F$ に対し，つぎの三つの性質は同等である：

(a) f は E の各点で連続である；

(b) f は原点で連続である；

(c) $|f(x)|$ は単位球 $|x|\leqslant 1$ において有界である。

〔**証明**〕(a)$\Rightarrow$(b) は明らかである。(b)$\Rightarrow$(c)：仮定により，ある実数 $r>0$ を $|x|\leqslant r\Rightarrow|f(x)|\leqslant 1$ が成り立つように選ぶことができる。したがって $|x|\leqslant 1\Rightarrow|f(x)|\leqslant 1/r$ を得る。

(c)$\Rightarrow$(a)：実数 $M>0$ を $|h|\leqslant 1\Rightarrow|f(h)|\leqslant M$ となるように選び，x を E の任意の点，$\varepsilon>0$ を任意の実数とすると $|h|\leqslant\varepsilon/M\Rightarrow|f(x+h)-f(x)|=|f(h)|\leqslant\varepsilon$ が成り立つ。▯

系 連続な線形写像 $f\colon E\to F$ は一様連続である。

〔**証明**〕f が連続ならば(c)によりある実数 $M>0$ が存在して，任意の x, $y\in E$ に対して $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$ が成り立つからである。▯

記号 E から F への連続な線形写像全体から成る集合を $\boldsymbol{L}(E;\ F)$ で表すことにする。$\boldsymbol{L}(E;\ F)$ は $\mathbf{R}$ 上の線形空間である。

定義 $\boldsymbol{L}(E;\ F)$ から $\mathbf{R}^+$ への関数 $f\mapsto\|f\|$ を

(1. 2. 1) $\|f\|=\sup\limits_{|x|\leqslant 1}|f(x)|$

により定義する。この関数は§1のノルムの公理 N1，2，3を満たすので線形空間 $\boldsymbol{L}(E;\ F)$ 上のノルムである。

任意の $x\in E$ に対して

(1. 2. 2) $|f(x)|\leqslant\|f\||x|$

が成り立つ。さらに，$M\geqslant 0$ を各 $x\in E$ に対して

(1. 2. 3) $|f(x)|\leqslant M|x|$

であるような実数とすると，$|x|\leqslant 1$ とすれば $|f(x)|\leqslant M$ であるから $\sup\limits_{|x|\leqslant 1}|f(x)|\leqslant M$，すなわち $\|f\|\leqslant M$ である。したがって，$\|f\|$ は (1. 2. 3) であるような最小の $M\geqslant 0$ であることがわかる。

定理 1. 2. 2 Fが Banach 空間であるならば，$\boldsymbol{L}(E; F)$ も Banach 空間である。

〔**証明**〕$(f_n)(0\leqslant n)$ を $\boldsymbol{L}(E; F)$ 内の Cauchy 列（すなわち，$\|f_{n+k}-f_n\|\to 0(n\to\infty)$ が成り立つ列）とするとき，$\|f-f_n\|\to 0(n\to\infty)$ であるような $f\in\boldsymbol{L}(E; F)$ の存在を証明すればよい。Eの点xを任意にとって固定して考えると，Banach 空間F内の点列 $(f_n(x))(0\leqslant n)$ は $|f_{n+k}(x)-f_n(x)|\leqslant\|f_{n+k}-f_n\||x|\to 0(n\to\infty)$，すなわち Cauchy 列であるから$F$の完備性により収束する。そこで，各 $x\in E$ に対し，$(f_n(x))(0\leqslant n)$ の収束点を対応させる写像 $E\to F$ をfとする。

fの線形性：$|f(x)+f(y)-f(x+y)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f(y)-f_n(y)|+|f_n(x+y)-f(x+y)|\to 0(n\to\infty)$ と $|f(xt)-tf(x)|\leqslant|f(xt)-f_n(xt)|+|tf_n(x)-tf(x)|\to 0(n\to\infty)$ とからfの線形性が得られる。ここで，x, $y\in E$, $t\in\mathbf{R}$ である。

f の連続性：整数 n を十分大きくとれば，任意の整数 $k>0$ に対して $\|f_{n+k}-f_n\|\leqslant 1$ が成り立つ。$|x|\leqslant 1$ として，kを十分大きくとれば $|f(x)|\leqslant|f_{n+k}(x)|+1\leqslant\|f_{n+k}\|+1$ であるが，$\|f_{n+k}\|\leqslant\|f_n\|+\|f_{n+k}-f_n\|\leqslant\|f_n\|+1$ であるから

$$|f(x)|\leqslant\|f_n\|+2$$

を得る。したがって，定理 1. 2. 1, (c)によりfは連続である。□

Eが有限次元であれば，後で述べるように（定理 1. 8. 2）EからFへの線形写像はいずれも連続である。Eが無限次元である場合には，つぎの例(1)に示すごとく連続でないEからFへの線形写像が必らず存在する。以下に二つの連続でない線形写像の例を示すが，例(1)では選択公理と同等な整列定理を用いている。例(2)では選択公理ないしはそれと同等な定理を用いていない。

例(1) Eを無限次元ノルム空間とし，$(e_\alpha)(\alpha\in A)$ を $|e_\alpha|=1$ であるよ

うな基底とする。添字集合Aを整列定理によって整列させ，順序数の集合$\{1, \cdots, n, \cdots\}$と考える。このとき，$c \neq \bar{0}$をFの元とし，有限順序数，すなわち整数nに対しては$f(e_n)=cn$，無限順序数$\alpha \in A$があれば$f(e_\alpha)=\bar{0}$とすることにより線形写像$f\colon E \to F$を定義すると，$|f(x)|$はEの単位球$|x| \leqslant 1$上で有界でない。したがって定理 1. 2. 1, (c)によりfは連続でない。

(2) 有限個の項を除いたすべての項が0であるような実数列全体から成る集合をEとし，$(a_n)_{1\leqslant n}$，$(b_n)_{1\leqslant n} \in E$，$t \in \mathbf{R}$に対して

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n),\quad t(a_n)=(ta_n)$$

によって加法とスカラ積を定義するとEは線形空間となる。また，E上にノルムを

$$|(a_n)|=\max_{n\geqslant 1}|a_n|$$

と定義する。Eの各元$(a_n)_{1\leqslant n}$に$b_n=na_n$であるようなEの元$(b_n)_{1\leqslant n}$を対応させる写像$f\colon E \to E$は線形写像であり，各$n \geqslant 1$に対し第n項のみが1で他項はすべて0であるようなEの元を$e^{(n)}$で表すと，$|e^{(n)}|=1$，$|f(e^{(n)})|=n$であるから，Eの単位球$|x| \leqslant 1$上で$|f(x)|$は有界でない。したがって，定理 1. 2. 1, (c)によりfは連続でない。

§3 Hahn-Banach の定理と Banach の定理

この§では無限次元ノルム空間の取扱いに基本的な標題の二つの定理を，本稿に必要な範囲に制限した形で述べる。

Eを線形空間とするとき，Eから$\mathbf{R}$への線形写像をE上の**線形汎関数**という。

定理 1. 3. 1 (Hahn-Banach の定理) Eをノルム空間，FをEの部分空間とするとき，F上の線形汎関数fで

(1. 3. 1) $f(x) \leqslant |x| \ (x \in F)$

を満たすものは，E 上の線形汎関数 g で，F 上で f と一致し

$$g(x)\leqslant|x|\,(x\in E)$$

を満たすものに拡張することができる。

〔**証明**〕(**I**) はじめに，$E=F+a\mathbf{R}(a\in E)$ であるような場合について証明する。$a\in F$ のときは $F=E$ となって定理は自明なものとなるので，以下では $a\notin F$ とする。x，y を F の任意の二元とすると $f(x)-f(y)=f(x-y)\leqslant|x+a|+|-y-a|$ であるから

(1. 3. 2)　$-f(y)-|y+a|\leqslant-f(x)+|x+a|$

を得る。そこで $\alpha=\inf\limits_{x\in F}(-f(x)+|x+a|)$ とし，$t\geqslant0$ を実数とすると $\alpha t\leqslant-f(xt)+|xt+at|$ で，もともと x は F の任意の元であったから，任意の $x\in F$ に対して

(1. 3. 3)　$f(x)+\alpha t\leqslant|x+at|$

が成り立つ。α の定義と (1. 3. 2) から $-f(y)-|y+a|\leqslant\alpha$ を得るが，これを用いると $t<0$ の場合も (1. 3. 3) が成り立つことがわかる。E の元は一意的に $x+at(x\in F)$ と表せるから

$$g(x)=f(x)+\alpha t$$

により定義される E 上の線形汎関数 g が求めるものとなる。

(**II**)　E が一般の場合について証明する。$F\subset H\subset E$ であるような部分空間 H 上の線形汎関数 h で，F 上で f と一致し，$x\in H$ に対して $h(x)\leqslant|x|$ となるような h 全体の集合を $\mathfrak{F}$ とする。h_1，$h_2\in\mathfrak{F}$ に対して

$$h_1<h_2\Longleftrightarrow\begin{cases}h_i\text{ が定義されている部分空間 }H_i(i=1,\ 2)\text{ について}\\ H_1\subset H_2,\\ x\in H_1\text{ に対して }h_1(x)=h_2(x)\end{cases}$$

により $\mathfrak{F}$ 上に順序を定義する。$\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{F}$ の全順序部分集合とすると，$\mathfrak{C}$ のすべての元 h の定義域の合併（$=E$の部分空間である）上の線形汎関数で，各 $h\in\mathfrak{C}$ の定義域上で h と一致するものは，$\mathfrak{F}$ の元で $\mathfrak{C}$ の上界となっている（すなわち，$\mathfrak{F}$ は帰納的順序集合となる）から，Zorn の補題により

$\mathfrak{F}$ は極大元 g: $G \to \mathbf{R}$ をもつ。$G=E$ であれば g が求める線形汎関数である。そうでないとすると，元 $a \in E \cap G^c$ が存在し，部分空間 $G+a\mathbf{R}$ を考えるとこれは G を真に含む部分空間で，(I) で証明したようにこの上で定義される $g_0 \in \mathfrak{F}$ が存在することになる。しかしながら，g_0 は g の真の拡張となっており，g の極大性に反するから $G=E$ でなければならない。□

系 E をノルム空間とする。

(i) E の任意の元 $x \neq \bar{0}$ に対し

$$\|f_x\|=1, \quad f_x(x)=|x|$$

となるような $f_x \in \boldsymbol{L}(E;\ \mathbf{R})$ が存在する。

(ii) E の元 x について，すべての $f \in \boldsymbol{L}(E;\ \mathbf{R})$ に対して $f(x)=0$ であるならば $x=\bar{0}$ である。

〔**証明**〕(ii)は(i)から明らかである。

(i)の証明：各 $t \in \mathbf{R}$ に対して $g(xt)=|x|t$ により定義される部分空間 $x\mathbf{R}$ 上の線形汎関数 g を考えると，$g(xt) \leqslant |xt|$ であるから，Hahn-Banach の定理により E 上の線形汎関数 f_x で，部分空間 $x\mathbf{R}$ 上で g に一致し，各 $y \in E$ に対して $f_x(y) \leqslant |y|$ であるものに拡張できる。この不等式から，各 $y \in E$ に対して

(1. 3. 4) $\quad |f_x(y)| \leqslant |y|$

が得られるから，f_x は連続であり（定理 1. 2. 1, (b)），(1. 3. 4) と $|f_x(x)| = |x|$ とから $\|f_x\|=1$ を得る。□

補題 Banach 空間 E において，閉部分集合の列 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ の合併が E に等しければ，少なくも一つの A_n は内点を持つ。

〔**証明**〕背理法により証明することにし，どの A_n も内点をもたないことを仮定する。この仮定により，$E \backslash A_1 (=E \cap A_1^c)$ は空でない開集合であるから，ある点 x_1 とある閉球 $\overline{B(x_1,\ \varepsilon_1)} = \{x \in E\colon |x-x_1| \leqslant \varepsilon_1\}$ $(\varepsilon_1 > 0)$ を

含む。E と A_1 を，それぞれ開球 $B(x_1,\ \varepsilon_1)=\{x\in E:\ |x-x_1|<\varepsilon_1\}$ と A_2 にかえれば，点 $x_2\in B(x_1,\ \varepsilon_1)\backslash A_2$ と開球 $\overline{B(x_2,\ \varepsilon_2)}\subset B(x_1,\ \varepsilon_1)\backslash A_2$ の存在が知られ，ここで $\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1/2$ とすることができる。このような操作を繰り返すことにより，各整数 $n\geqslant 1$ について

(1. 3. 5) $x_n\in B(x_{n-1},\ \varepsilon_{n-1})\backslash A_n,\ \overline{B(x_n,\ \varepsilon_n)}\subset B(x_{n-1},\ \varepsilon_{n-1})\backslash A_n,$

$\varepsilon_n\leqslant\varepsilon_{n-1}/2$

を満たすような点 x_n，開球 $B(x_n,\ \varepsilon_n)$，正数 ε_n が得られる。整数 $n,\ k\geqslant 1$ に対して $|x_{n+k}-x_n|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|x_{n+i}-x_{n+i-1}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{n+i-1}\leqslant\varepsilon_1/2^{n-2}$ であるから，点列 $(x_n)(1\leqslant n)$ は Cauchy 列であり，E の完備性から $|x-x_n|\to 0$ $(n\to\infty)$ となるような点 $x\in E$ が存在する。(1. 3. 5) を用いると，各 $n,\ k\geqslant 1$ について $x_{n+k}\in\overline{B(x_n,\ \varepsilon_n)}$ であるから $x\in\overline{B(x_n,\ \varepsilon_n)}\subset A_n^c$ となり，$x\in E\backslash(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\varnothing$ という矛盾が生じる。

定理 1. 3. 2 (Banach の定理) $E,\ F$ を Banach 空間とすると，連続で全単射である線形写像 $f\colon E\to F$ はノルム空間の同形となる（すなわち，f^{-1} も連続となる)。

〔**証明**〕 f^{-1} の連続性を証明すればよいのであるから，以下では V を E の原点を中心とする閉球 $|x|\leqslant\varepsilon(\varepsilon>0)$ とし，$f(V)$ が F の原点の近傍であることを証明する。はじめに，閉包 $\overline{f(V)}$ が F の原点の近傍であることを示す。V_1 を E 内の閉球 $|x|\leqslant\varepsilon/2$ とし，$nV_1=\{nx:\ x\in V_1\}$ とおくと $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}nV_1$ である。したがって，$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}n\overline{f(V_1)}$ であり，補題によりある $n\overline{f(V_1)}$ は内点を含む。写像 $y\mapsto y/n$ は F から F 上への位相同形であるから，この写像による $n\overline{f(V_1)}$ の像である $\overline{f(V_1)}$ も内点 y_0 を含む。正の実数 r を $B(y_0,\ r)=\{y\in F:\ |y-y_0|<r\}\subset\overline{f(V_1)}$ となるようにとると，$-y_0+B(y_0,\ r)=\{-y_0+y:\ y\in B(y_0,\ r)\}=B(\bar{0},\ r)\subset -y_0+\overline{f(V_1)}$ である。ここで，$-V_1=\{-x:\ x\in V_1\}=V_1$ および $V_1+V_1=\{x+x':\ x,\ x'\in V_1\}\subset V$ を用いれば $B(\bar{0},\ r)\subset\overline{f(V_1)}+\overline{f(V_1)}\subset\overline{f(V_1)+f(V_1)}\subset\overline{f(V)}$ が得られ，$\overline{f(V)}$ が F の原点の近傍であることが示された。

つぎに，ここに得られた結果を用いて $f(V)$ が F の原点の近傍であることを証明する。各整数 $n\geqslant 1$ に対して，V_n を E の閉球 $|x|\leqslant\varepsilon/2^n$ とすると，上の結果から F の開球 $W_n=\{y\in F\colon |y|<r_n\}$ を $W_n\subset\overline{f(V_n)}$, $r_n\to 0(n\to\infty)$ であるように定めることができる。そこで y を W_1 の任意の点とする。$y\in\overline{f(V_1)}$ であるから y の近傍 $y+W_2$ は $f(V_1)$ と交わるので，$f(x_1)\in y+W_2$ であるような点 $x_1\in V_1$ が存在する。つぎに，y, W_1 をそれぞれ $y-f(x_1)$, W_2 におきかえれば，$f(x_2)\in y-f(x_1)+W_3$ であるような点 $x_2\in V_2$ の存在がわかる。このような操作を繰り返せば，各 $n\geqslant 1$ に対して $y-f(x_1)-\cdots-f(x_n)\in W_{n+1}$ であるような点 $x_n\in V_n$ が得られ，$r_n\to 0(n\to\infty)$ であったから $|y-\sum_{i=1}^{n}f(x_i)|\to 0(n\to\infty)$，すなわち $y=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ である。一方，整数 n, $k\geqslant 1$ に対して $|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+k}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|x_{n+i}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\varepsilon/2^{n+i}\leqslant\varepsilon^{n-1}$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ は Cauchy 和であり，E の完備性により収束するが，f の連続性を用いれば $f(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=y$ である。そして，$x_1+\cdots+x_n\in V_1+\cdots+V_n\subset V$ で，V は閉集合であるから $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in V$，したがって $y\in f(V)$ を得る。y が W_1 の任意の点であったから $W_1\subset f(V)$，すなわち $f(V)$ は F の原点の近傍である。□

§4　ノルム空間の同形

この§では E, F をノルム空間とする。

定義 1. 4. 1　線形同形　$f\colon E\to F$ が位相同形，すなわち f および f^{-1} が連続であるとき f を**ノルム空間の同形**ということにする。また，E から F 上へのノルム空間の同形が存在するとき，ノルム空間 E, F は**互いに同形である**という。

とくに E, F が Banach 空間である場合には，Banach の定理 (1. 3. 2) により連続な線形同形 $E\to F$ はいずれもノルム空間の同形になる。

定義 1. 4. 2　ρ_1, ρ_2 を E 上の二つのノルムとするとき，E 上にノルムとして ρ_1 を定めたノルム空間 E_1 と，ノルムとして ρ_2 を定めたノルム

空間 E_2 とが考えられる。このとき，恒等写像

$$I:\ E_1 \to E_2$$

がノルム空間の同形ならば，ノルム ρ_1 と ρ_2 とは**互いに同値である**という。

ρ_1 と ρ_2 が互いに同値であることは，定理 1. 2. 1, (c) によりつぎの条件と同等である：

実数 $m>0$, $M>0$ が存在して各 $x\in E$ に対し

(1. 4. 1)　$m\rho_1(x)\leqslant\rho_2(x)\leqslant M\rho_1(x)$。

さらに，$V_i(r)=\{x\in E:\ \rho_i(x)<r\}$ $(0<r,\ i=1,\ 2)$ とおくと，$(V_1(r))$ $(0\leqslant r)$，$(V_2(r))$ $(0\leqslant r)$ をそれぞれ原点の基本近傍系とする E の二つの位相は同一の位相である。

ノルム空間 $\boldsymbol{L}(E;\ E)$ において，任意の二元 f, g の合成写像 $g\circ f$ はまた $\boldsymbol{L}(E;\ E)$ の元となる。$x\in E$ に対して

$$|g\circ f(x)|\leqslant\|g\|\,|f(x)|\leqslant\|g\|\,\|f\|\,|x|$$

であるから (1. 2. 2)

(1. 4. 2)　$\|g\circ f\|\leqslant\|g\|\,\|f\|$

が成り立つ。

定理 1. 4. 1　E を Banach 空間とする。$f\in\boldsymbol{L}(E;\ E)$ について，$\|f\|<1$ ならば写像 $I-f$ はノルム空間の同形である。

〔**証明**〕$I-f$ は連続であるから，$I-f$ が全単射であることさえ証明すれば，あとは Banach の定理 (1. 3. 2) により $I-f$ はノルム空間の同形となる。無限和 $\sum_{n=0}^{\infty}f^n$ を考える。ここで，$f^0=I$, $f^n=\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{n\text{個}}$ とする。$\|\sum_{i=n}^{n+k}f^i\|\leqslant\sum_{i=n}^{n+k}\|f^i\|\leqslant\sum_{i=n}^{n+k}\|f\|^i$ であるから，$\|f\|<1$ より上の無限和は Cauchy 和である。E が Banach 空間であるから，定理 1. 2. 2 により $\boldsymbol{L}(E;\ E)$ も Banach 空間であり，完備性によってある $g\in\boldsymbol{L}(E;\ E)$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty}f^n=g$ が成り立つ。この g に対して $(I-f)\circ g=g\circ(I-f)=I$ を得るから，写像 $I-f$ は全単射である。□

記号　E から F 上へのノルム空間の同形全体から成る集合を記号 $\mathrm{Isom}(E;\,F)$ で表すことにする。$\mathrm{Isom}(E;\,F)\subset \boldsymbol{L}(E;\,F)$ であり，とくに $E,\ F$ が Banach 空間であるときつぎの定理が成り立つ。

定理 1. 4. 2　$E,\ F$ を Banach 空間とする。

(a)　$\mathrm{Isom}(E;\,F)$ はノルム空間 $\boldsymbol{L}(E;\,F)$ の開部分集合である。

(b)　写像

$$\begin{aligned}\Phi:\ &\mathrm{Isom}(E;\,F)\to \boldsymbol{L}(F;\,E)\\ &f\ \longmapsto\ f^{-1}\end{aligned}$$

は連続である。

〔**証明**〕(a)　$f\in\mathrm{Isom}(E;\,F)$ とするとき，$h\in\boldsymbol{L}(E;\,F)$ のノルム $\|h\|$ が十分小さければ $f+h\in\mathrm{Isom}(E;\,F)$ であることを示せばよい。$\|I-f^{-1}\circ(f+h)\|=\|f^{-1}\circ h\|\leqslant\|f^{-1}\|\,\|h\|$ であるから，前定理により $\|h\|<1/\|f^{-1}\|$ ならば $f^{-1}\circ(f+h)$ はノルム空間の同形である。したがって，このとき $f+h$ もノルム空間の同形，すなわち $f+h\in\mathrm{Isom}(E;\,F)$ である。

(b)　$f\in\mathrm{Isom}(E;\,F)$，$h\in\boldsymbol{L}(E;\,F)$ とし，$\|h\|<1/\|f^{-1}\|$ を仮定する。このとき(a)により $f+h\in\mathrm{Isom}(E;\,F)$ であり，仮定から $\|f^{-1}\circ h\|<1$ であるから $(I+f^{-1}\circ h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-f^{-1}\circ h)^n$ が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}\|(f+h)^{-1}-f^{-1}\|&=\|((I+f^{-1}\circ h)^{-1}-I)\circ f^{-1}\|\\ &=\|(\sum_{n=1}^{\infty}(-f^{-1}\circ h)^n)\circ f^{-1}\|\leqslant(\sum_{n=1}^{\infty}\|f^{-1}\circ h\|^n)\|f^{-1}\|\\ &=\frac{\|f^{-1}\circ h\|\,\|f^{-1}\|}{1-\|f^{-1}\circ h\|}\leqslant\|f^{-1}\|^2\|h\|\end{aligned}$$

を得るが，これは写像 Φ が連続であることを示している。□

定義 1. 4. 3　ノルム空間の同形 $f\colon E\to F$ が，各 $x\in E$ に対して

$$|f(x)|=|x|$$

を満たすとき，f を E から F 上への**距離同形**といい，E から F 上へ距離同形が存在するとき E と F とは**互いに距離同形である**という。また，距離同形 f により E と F とが互いに距離同形であることを

$$f\colon E \approx F$$

と書くことにする。

例　写像　$\Phi\colon \boldsymbol{L}(\mathbf{R};\ E) \to E$

$$f \longmapsto f(1)$$

を考えると，$\|f\| = \max(|f(1)|,\ |f(-1)|)$，$|f(1)| = |f(-1)|$ であるから

$$\Phi\colon \boldsymbol{L}(\mathbf{R};\ E) \approx E$$

である。そこで，以後とくに断ることなく $\boldsymbol{L}(\mathbf{R};\ E)$ と E とを同一視する。

§5　積ノルム空間と直和ノルム空間

$E_1,\ \cdots,\ E_n$ を有限個のノルム空間とする。これら $E_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ の積集合 $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ は，加法とスカラ積を

$$(x_1,\ \cdots,\ x_n) + (y_1,\ \cdots,\ y_n) = (x_1 + y_1,\ \cdots,\ x_n + y_n),$$

$$(x_1,\ \cdots,\ x_n)t = (x_1 t,\ \cdots,\ x_n t)$$

と定義することにより線形空間となる。ここで，$x_i,\ y_i \in E_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，$t \in \mathbf{R}$ である。さらに，この積線形空間 E 上でノルムを

(1. 5. 1)　$|(x_1,\ \cdots,\ x_n)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

により定めると，このノルムはノルムの公理 N1，2，3（§1）を満たし，E はノルム空間となる。このノルム空間 E をノルム空間 $E_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ の**積ノルム空間**ということにする。

各 $1 \leqslant i \leqslant n$ について，線形写像

(1. 5. 2)　$h_i(x_i) = (0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{i}{\smile}{x_i},\ 0,\ \cdots,\ 0)\ (x_i \in E_i)$

を E_i から E への**標準単射と**いい，また線形写像

(1. 5. 3)　$\pi_i(x_i,\ \cdots,\ x_n) = x_i\ (x_k \in E_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$

を E から E_i への**射影**という。積ノルム空間のノルムの定義 (1. 5. 1) により

$$|h_i(x_i)|=|(0, \cdots, 0, \overset{i}{\breve{x_i}}, 0, \cdots, 0)|=|x_i|,$$
$$|\pi_i(x_1, \cdots, x_n)|=|x_i|\leqslant|(x_1, \cdots, x_n)|$$

であるから，各 h_i, $\pi_i(1\leqslant i\leqslant n)$ は連続である。

定理 1. 5. 1 有限個のノルム空間 $E_1, \cdots, E_n$ がいずれも完備ならば，それらの積ノルム空間 $E=E_1\times\cdots\times E_n$ も完備である。逆に，積ノルム空間 E が完備ならば，各ノルム空間 $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ も完備である。

〔**証明**〕 各 $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$は完備であるとする。$(x^{(\alpha)})(\alpha\in\mathbf{N})$を$E$の Cauchy 列とし，これが収束することを示せばよい。$\mathbf{N}$は自然数の集合である。各 $1\leqslant i\leqslant n$ について $(\pi_i(x^{(\alpha)}))(\alpha\in\mathbf{N})$ は Cauchy 列であるから（命題1. 1. 1, 定理 1. 2. 1 の系）ある点 $\lambda_i\in E_i$ に収束する。ここで，h_i の連続性により

$$\lim_{\alpha\to\infty}x^{(\alpha)}=\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^{n}h_i\circ\pi_i(x^{(\alpha)})=\sum_{i=1}^{n}h_i(\lim_{\alpha\to\infty}\pi_i(x^{(\alpha)}))$$
$$=\sum_{i=1}^{n}h_i(\lambda_i)=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)。$$

逆も同様に証明できる。□

この定理により，積ノルム空間 $E_1\times\cdots\times E_n$ を，各 $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ が Banach 空間であるとき**積 Banach 空間**ともいうことにする。

E を線形空間，$E_1, \cdots, E_n$ を E の部分空間とする。E がこれらの部分空間の代数的直和になっているとき，すなわち

$$E=\sum_{i=1}^{n}E_i,\ E_i\cap E_j=\{\bar{0}\}\ (i\neq j)$$

であるとき，各 $x\in E$ の $x=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i\in E_i)$ なる表し方は一意的であるから，線形写像

$$(1.5.4)\quad \begin{aligned} E&\longrightarrow E_1\times\cdots\times E_n \\ \sum_{i=1}^{n}x_i&\longmapsto(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

は E から $E_1\times\cdots\times E_n$ 上への線形同形である。これを $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ の直

和線形空間からそれらの積線形空間への標準同形という。E がノルム空間であるときには，E の任意の部分空間は E 上のノルムをその部分空間に制限して得られるノルムによりノルム空間となる。

定義 ノルム空間 E がその部分空間 $E_1, \cdots, E_n$ の代数的直和であって，E から $E_1\times\cdots\times E_n$ 上への標準同形（1. 5. 4）がノルム空間の同形であるとき，E を部分空間 $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ の**直和ノルム空間**であるといい，このとき

$$E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$$

と書くことにする。

E が部分空間 $E_1, \cdots, E_n$ の代数的直和であるとき，各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して，線形写像

(1. 5. 5) $$e_i:\ E_i\to E,\quad x_i\mapsto x_i$$

を E_i から E への**標準単射**といい，また線形写像

(1. 5. 6) $$p_i:\ E\longrightarrow E_i,\quad \sum_{k=1}^{n}x_k\mapsto x_i$$

を E から E_i への**射影**という。

定理 1. 5. 2 ノルム空間 E が部分空間 $E_1, \cdots, E_n$ の代数的直和になっているとする。

各 $1\leqslant i\leqslant n$ について射影 p_i: $E\to E_i$ が連続であることは，E が $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ の直和ノルム空間となるための必要十分条件である。

〔**証明**〕 E が $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ の直和ノルム空間であるとすると，p_i は標準同形 θ: $E\to E_1\times\cdots\times E_n$ と射影 π_i の合成写像 $\pi_i\circ\theta$ であるから連続である。

逆に，各 $p_i(1\leqslant i\leqslant n)$ が連続であるとすると，標準同形 θ は $\sum_{i=1}^{n}h_i\circ p_i$ と書けるから連続である。□

註　射影 $p_i(1\leqslant i\leqslant n)$ について，これらのうちのある $(n-1)$ 個が連続であれば，残る1個も連続である。たとえば，p_1，…，p_{n-1} が連続であるとすると，$p_n=I-(p_1+\cdots+p_{n-1})$ であるから p_n も連続である。

定理 1. 5. 3　Banach 空間 E が閉部分空間 E_1，…，E_n の代数的直和であるとき，E は $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ の直和ノルム空間となる。

〔**証明**〕各部分空間 E_i は完備な空間の閉部分集合であるから完備であり，定理 1. 5. 1 によりそれらの積ノルム空間 $F=E_1\times\cdots\times E_n$ も完備である。すなわち F は Banach 空間となる。E から F 上への標準同形 (1. 5. 4) を考えると $|\sum_{i=1}^{n}x_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ によりその逆写像は連続である。さらに Banach の定理 (1. 3. 2) によりこの標準同形はノルム空間の同形であることがわかる。□

E が Banach 空間で，各 E_1，…，E_n が閉部分空間であるときには，前定理により

$$E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$$

であるから，このときEは部分 Banach 空間 $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ の**直和 Banach 空間**であるということにする。

E_1，…，E_n が互いに独立した Banach 空間であるとき，積 Banach 空間 $E=E_1\times\cdots\times E_n$ の各部分空間 $h_i(E_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ は $\bigcap_{k\neq i}\pi_k^{-1}(\bar{0}_k)$ ($\bar{0}_k$ は E_k の零元) に等しいから E の閉部分空間である。定理 1. 5. 3 により $E=\bigoplus_{i=1}^{n}h_i(E_i)$ であり

(1. 5. 7)　$h_i\colon E_i\approx h_i(E_i)(1\leqslant i\leqslant n)$

と合せて

(1. 5. 8)　$I\colon E_1\times\cdots\times E_n\approx\bigoplus_{i=1}^{n}h_i(E_i)$

を得る。

§6　連続多重線形写像

定義 1. 6. 1　$E_1, \cdots, E_n, F$ を線形空間とする。写像

$$f: E_1\times\cdots\times E_n\to F$$

がつぎの性質をもつとき**多重線形である**という：

各 $1\leqslant i\leqslant n$ について，任意の $a_k\in E_k(1\leqslant k\leqslant n,\ k\neq i)$ に対し写像

$$\begin{aligned} E_i &\longrightarrow F \\ x_i &\longmapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

が線形である。

とくに $n=2$ のとき f は**双線形である**という。

定理 1. 6. 1　$E_1, \cdots, E_n, F$ をノルム空間とする。多重線形写像 $f: E_1\times\cdots\times E_n\to F$ に関する以下の三つの性質は同等である：

(a)　f は $E_1\times\cdots\times E_n$ の各点で連続である；

(b)　f は原点 $(\bar{0}, \cdots, \bar{0})$ で連続である；

(c)　$|f(x_1, \cdots, x_n)|$ の値は $|x_1|\leqslant 1, \cdots, |x_n|\leqslant 1$ なる範囲で有界である。ここに $x_i\in E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ とする。

〔**証明**〕(a)⇒(b)は明らかである。

(b)⇒(c)：(b)を仮定すると積ノルム空間上のノルムの定義 (1. 5. 1) により，各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して $|x_i|\leqslant r$ ならば $|f(x_1, \cdots, x_n)|\leqslant 1$ となるような実数 $r>0$ が存在する。したがって，$|x_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$ とすると $|f(x_1r, \cdots, x_nr)|\leqslant 1$ であるから $|f(x_1, \cdots, x_n)|\leqslant r^{-n}$ となる。

(c)⇒(a)：$M>0$ を $|x_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$ ならば $|f(x_1, \cdots, x_n)|\leqslant M$ となるような実数とすると，任意の $(x_1, \cdots, x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ に対して

(1. 6. 1)　$|f(x_1, \cdots, x_n)|\leqslant M|x_1|\cdots|x_n|$

が成り立つ。以下では，$E_1\times\cdots\times E_n$ の任意の点 $(a_1, \cdots, a_n)$ をとり，f がこの点で連続であることを示す。

$$\begin{aligned} &f(x_1, \cdots, x_n)-f(a_1, \cdots, a_n) \\ &\quad =f(x_1-a_1, x_2, \cdots, x_n)+f(a_1, x_2-a_2, x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

$$+\cdots+f(a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ x_n-a_n)$$

であるから

$$|f(x_1,\ \cdots,\ x_n)-f(a_1,\ \cdots,\ a_n)|$$
$$\leqslant M(|x_1-a_1||x_2|\cdots|x_n|+|a_1||x_2-a_2||x_3|\cdots|x_n|$$
$$+\cdots+|a_1|\cdots|a_{n-1}||x_n-a_n|)$$

を得る。実数 $\varepsilon>0$ を任意にとって $\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|a_i|+\varepsilon)=A$ とおき，各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して $|x_i-a_i|\leqslant\varepsilon$ とおくと，$|x_i|\leqslant|a_i|+\varepsilon$ であるから

$$|f(x_1,\ \cdots,\ x_n)-f(a_1,\ \cdots,\ a_n)|\leqslant nMA^{n-1}\varepsilon$$

を得る。ゆえに f は点 $(a_1,\ \cdots,\ a_n)$ で連続である。▯

系 連続な多重線形写像は一様連続である。

〔**証明**〕定理の (c) ⇒ (a) の証明の部分から明らかである。

記号 ノルム空間 $E_1,\ \cdots,\ E_n$ の積ノルム空間からノルム空間 F への連続な多重線形写像全体から成る集合を記号 $\boldsymbol{L}(E_1,\ \cdots,\ E_n;\ F)$ で表すことにする。

定義 1. 6. 2 線形空間 $\boldsymbol{L}(E_1,\ \cdots,\ E_n;\ F)$ 上にノルムを

$$\|f\|=\sup\{|f(x_1,\ \cdots,\ x_n)|:\ |x_1|\leqslant1,\ \cdots,\ |x_n|\leqslant1\}$$

により定める。ここに，$f\in\boldsymbol{L}(E_1,\ \cdots,\ E_n;\ F)$，$x_i\in E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ である。このノルムはノルムの公理 N1, 2, 3 (§1) を満たす。

(1. 6. 1) により任意の $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ に対して

(1. 6. 2) $\quad|f(x_1,\ \cdots,\ x_n)|\leqslant\|f\||x_1|\cdots|x_n|$

を得る。$\|f\|$ は (1. 6. 1) を満たすような実数 $M\geqslant0$ の最小のものである。

定理 1. 2. 2 の証明と同様に，F が Banach 空間である場合には $\boldsymbol{L}(E_1,\ \cdots,\ E_n;\ F)$ も Banach 空間になることがわかる。

§7 標準距離同形 $\boldsymbol{L}(E,\ F;\ G)\approx\boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(F;\ G))$

$E,\ F,\ G$ を三つのノルム空間とする。$f\in\boldsymbol{L}(E,\ F;\ G)$，$x\in E$ に対し

線形写像

(1. 7. 1)　$\sigma_f(x): F \longrightarrow G$

$$y \longmapsto f(x,\ y)$$

を考えると，(1. 6. 2) から

(1. 7. 2)　$|\sigma_f(x)y| \leqslant \|f\| |x| |y|$

であるから $\sigma_f(x)$ は連続，すなわち $\sigma_f(x) \in \boldsymbol{L}(F;\ G)$ であることがわかる。さらに写像

(1. 7. 3)　$\sigma_f: E \rightarrow \boldsymbol{L}(F;\ G)$

$$x \longmapsto \sigma_f(x)$$

を考えると，線形写像であって (1. 7. 2) から

(1. 7. 4)　$\|\sigma_f(x)\| \leqslant \|f\| |x|$

を得るから σ_f は連続，すなわち $\sigma_f \in \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(F;\ G))$ である。

以上により写像

$$\Phi:\ \boldsymbol{L}(E,\ F;\ G) \rightarrow \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(F;\ G))$$

$$f \longmapsto \sigma_f$$

が得られたが，これは線形かつ全射であることが容易にわかる。不等式 $|\sigma_f(x)y| \leqslant \|\sigma_f\| |x| |y|$ から

(1. 7. 5)　$\|f\| \leqslant \|\sigma_f\|$

を得るが，これから Φ は単射であることがわかる。また (1. 7. 4) から

(1. 7. 6)　$\|\sigma_f\| \leqslant \|f\|$

を得るが，これは Φ が $\bar{0} \in \boldsymbol{L}(E,\ F;\ G)$ において連続であることを示し，一方 (1. 7. 5) は Φ の逆写像が $\bar{0} \in \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(F;\ G))$ で連続であることを示す。したがって Φ はノルム空間の同形となるが，(1. 7. 5)，(1. 7. 6) を合せると $\|\sigma_f\| = \|f\|$ となり Φ は距離同形であること，すなわち

(1. 7. 7)　$\Phi:\ \boldsymbol{L}(E,\ F;\ G) \approx \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(F;\ G))$

であることがわかる。Φ を $\boldsymbol{L}(E,\ F;\ G)$ から $\boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(F;\ G))$ 上への標準距離同形という。

同様にして，標準距離同形

(1. 7. 8)　$\Psi: \boldsymbol{L}(E, F; G) \approx \boldsymbol{L}(F; \boldsymbol{L}(E; G))$

が得られる。

§8　有限次元ノルム空間と Euclid 空間

線形空間 $\mathbf{R}^n$ 上のノルム

$$|(x_1, \cdots, x_n)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

を Euclid ノルムという。

各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して，i 番目の成分が 1 で他の成分はすべて 0 であるような $\mathbf{R}^n$ の元を e_i で表す，すなわち

$$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{\overset{i}{\smile}}{1}, 0, \cdots, 0)$$

とする。$(e_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ は $\mathbf{R}^n$ の基底をなす。

定理 1. 8. 1　線形空間 $\mathbf{R}^n$ 上の任意の二つのノルムは互いに同値である。

〔**証明**〕 $\mathbf{R}^n$ 上の任意のノルム ρ が Euclid ノルムと同値であることを証明する。E_1, E_2 で，それぞれ Euclid ノルム，ノルム ρ をノルムとして採ったノルム空間 $\mathbf{R}^n$ を表すことにする。$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \in \mathbf{R}^n$, $x_i \in \mathbf{R} (1 \leqslant i \leqslant n)$ とすると，二つの不等式 $\rho(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i)|x_i|$ と $|x_k| \leqslant |x| (1 \leqslant k \leqslant n)$ とから $|x| \to 0$ のとき $\rho(x) \to 0$ であり，したがって $I: E_1 \to E_2$ は連続である。

つぎに，$y = \sum_{i=1}^{n} e_i y_i$ も $\mathbf{R}^n$ の元とすると，

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \rho(x-y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i)|x_i - y_i|$$

であるから，写像 $\rho: E \to \mathbf{R}^+$ は連続である。したがって，ρ はコンパクト集合 $|x|=1$ 上で最小値 m をとり，ノルムの公理 N1 により $m>0$ である。したがって，任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$m|x| \leqslant \rho(x)$$

が成り立つが，これは I: $E_2 \to E_1$ が連続であることを示している。□

以下では，$\mathbf{R}^n$ をノルム空間というとき，とくに断らないかぎり Euclid ノルムが採られているものとする。

系 1 n 次元ノルム空間 E はノルム空間 $\mathbf{R}^n$ と同形である。

〔**証明**〕 $(a_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ を E の一組の基底とし，$e_i \mapsto a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ で定まる線形同形 $\mathbf{R}^n \to E$ を f とする。ノルム空間 E のノルムを ρ とすると $\rho \circ f$ は $\mathbf{R}^n$ 上のノルムである。そこで，このノルムを採るノルム空間 $\mathbf{R}^n$ を F とすれば，f: $F \to E$ はノルム空間の同形である（距離同形になっている）。f がノルム空間 F から E 上への同形であることを f: $F \sim E$ のごとく書くことにすれば，上の定理によって I: $\mathbf{R}^n \sim F$ であるから，$f \circ I$: $\mathbf{R}^n \sim E$ となりこの系の証明ができた。□

系 2 有限次元ノルム空間は完備である。

〔**証明**〕 E を n 次元ノルム空間，f: $\mathbf{R}^n \to E$ をノルム空間の同形とする。$(a_n)(0 \leqslant n)$ を E の Cauchy 列とすると $(f^{-1}(a_n))(0 \leqslant n)$ は $\mathbf{R}^n$ の Cauchy 列となるが（定理 1. 2. 1 の系，命題 1. 1. 1），$\mathbf{R}^n$ は完備であるから $(f^{-1}(a_n))(0 \leqslant n)$ は $\mathbf{R}^n$ のある点 $\bar{a}$ に収束する。しかるに，f の連続性により $(a_n)(0 \leqslant n)$ は $f(\bar{a})$ に収束する。□

定理 1. 8. 2 E を有限次元ノルム空間，F を有限または無限次元のノルム空間とすると，E から F への線形写像は連続である。

〔**証明**〕 f: $E \to F$ を線形写像とする。E の次元を n とし，g: $\mathbf{R}^n \to E$ をノルム空間の同形とするとき，合成写像 $h = f \circ g$: $\mathbf{R}^n \to F$ が連続であることを証明すればよい。$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i (x_i \in \mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^n$ の元とすると，

$$|h(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |h(e_i)| |x_i|$$

であり，$|x| \to 0$ とすると各 $|x_i| \to 0$ であるから $|h(x)| \to 0$ となり，h は原点で連続であることがわかる。しかるに，h は線形写像であるから

$\mathbf{R}^n$ において連続である。□

系　E_1, …, E_m を有限次元ノルム空間，F を有限または無限次元のノルム空間とすると，$E_1 \times \cdots \times E_m$ から F への多重線形写像は連続である。

〔**証明**〕$m=2$ の場合について証明する。f: $E_1 \times E_2 \to F$ を双線形写像とし，$x \in E_1$ を任意にとって固定すると，線形写像

$$\begin{aligned} \sigma(x): E_2 &\longrightarrow F \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

は前定理により連続であり

(1. 8. 1)　$|f(x, y)| \leqslant \|\sigma(x)\| |y|$

を得る。また，写像

$$\begin{aligned} \sigma: E_1 &\to \boldsymbol{L}(E_2; F) \\ x &\longmapsto \sigma(x) \end{aligned}$$

は線形で，前定理により連続であるから

(1. 8. 2)　$\|\sigma(x)\| \leqslant \|\sigma\| |x|$

を得る。(1. 8. 1) と (1. 8. 2) により，任意の $x \in E_1$, $y \in E_2$ に対して

$$|f(x, y)| \leqslant \|\sigma\| |x| |y|$$

が成り立ち，したがって $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ ならば $|f(x, y)| \leqslant \|\sigma\|$ であるから双線形写像 f は連続である（定理 1. 6. 1, (c))。□

定義　有限次元ノルム空間 E のノルムが，任意の二元 x, y に対して

中線定理

(1. 8. 3)　$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$

を満たすとき，このノルムを **Euclid ノルム**といい，E を **Euclid 空間**という。

E を線形空間とするとき，実数値をとる双線形写像 $E \times E \to \mathbf{R}$ を E 上の**双線形形式**という。

定理 1. 8. 3　有限次元ノルム空間 E においては，Euclid ノルム $|x|$

に対して写像 $f\colon E\times E\to\mathbf{R}$ を

(1. 8. 4)　$4f(x,\ y)=|x+y|^2-|x-y|^2$

によって定めると，f は E 上の双線形形式であって，正値（$x\neq\bar{0}$ のとき $f(x,\ x)>0$）かつ対称（$f(x,\ y)=f(y,\ x)$）である。逆に，E 上の正値対称な双線形形式 f に対して

(1. 8. 5)　$|x|=\sqrt{f(x,\ x)}$

とおくと，$|x|$ は E 上の Euclid ノルムである。

さらに，(1. 8. 4) による E 上の Euclid ノルム全体の集合から E 上の正値対称な双線形形式全体の集合への写像 Φ は全単射である。

〔**証明**〕まず，定理の最後の部分を，それ以前の部分を仮定した上で証明する。$\rho(x)$ を E 上の Euclid ノルムとし，(1. 8. 4) で定められている f について $4f(x,\ y)=\rho(x+y)^2-\rho(x-y)^2$ も成り立っているとすると，$\rho(x)^2=f(x,\ x)=|x|^2$ を得るから写像 Φ は単射であることがわかる。また，双線形形式 f が与えられたとき $4f(x,\ y)=f(x+y,\ x+y)-f(x-y,\ x-y)$ が成り立つから，f が正値対称であればそれは (1. 8. 5) で定まる Euclid ノルムの Φ による像であり，Φ が全射であることがわかる。

つぎに，Euclid ノルム $|x|$ から (1. 8. 4) で定められる写像 $f\colon E\times E\to\mathbf{R}$ が正値対称な双線形形式であることを示す。f の正値性と対称性は (1. 8. 4) から直ちにわかる。したがって，あとは $x_1,\ x_2,\ x,\ y\in E,\ t\in\mathbf{R}$ に対して

(1. 8. 6)　$f(x_1+x_2,\ y)=f(x_1,\ y)+f(x_2,\ y)$,

(1. 8. 7)　$f(xt,\ y)=tf(x,\ y)$

を証明すればよい。まず，(1. 8. 6) を証明する。中線定理 (1. 8. 3) を二度用いて

(1. 8. 8)
$$\begin{aligned}2(|x_1+y|^2+|x_2+y|^2)&=|x_1+x_2+2y|^2+|x_1-x_2|^2\\&=2(|x_1+x_2+y|^2+|y|^2)-|x_1+x_2|^2+|x_1-x_2|^2\end{aligned}$$

を得る。この等式の y に $-y$ を代入すると

$$(1.8.9)\quad 2(|x_1-y|^2+|x_2-y|^2)$$
$$=2(|x_1+x_2-y|^2+|y|^2)-|x_1+x_2|^2+|x_1-x_2|^2$$

となり，(1. 8. 8) から (1. 8. 9) を引くことにより

$$|x_1+x_2+y|^2-|x_1+x_2-y|^2$$
$$=(|x_1+y|^2-|x_1-y|^2)+(|x_2+y|^2-|x_2-y|^2)$$

を得るが，これは (1. 8. 6) が成り立つことを意味する。つぎに (1. 8. 7) を証明する。(1. 8. 7) の左辺を t の関数と見なして $g(t)$ とおくと，任意の実数 t に対して

$$(1.8.10)\quad g(t)=tg(1)$$

を証明すればよい。$4g(t)=|xt+y|^2-|xt-y|^2$ であるから，$g(t)$ は t の連続関数である。実際，たとえば $||xt+y|-|xu+y||\leqslant|t-u||x|$ から関数 $t\mapsto|xt+y|$ の連続性がわかる。(1. 8. 10) の右辺は t の線形関数であるから，t の連続関数であり，したがって，t が有理数のとき (1. 8. 10) が成り立つことを証明すれば十分である。$t=0$ のときは，$g(t)=0$ であるから (1. 8. 10) は成り立つ。(1. 8. 6) により，二実数 t, u に対して

$$(1.8.11)\quad g(t+u)=g(t)+g(u)$$

であるから $g(-t)=-g(t)$ が成り立ち，したがって (1.8.10) の証明はさらに t が正の有理数の場合に限ってよい。ところで，整数 $m>0$ に対しては (1.8.11) から $g(mt)=mg(t)$ であり，さらに $n>0$ も整数として $t=1/n$ とおけば $ng(t)=g(nt)=g(1)$ であるから，$g(m/n)=mg(1/n)=(m/n)g(1)$ が得られ，(1.8.10) は t が正の有理数のとき成り立つことが証明できた。

最後に，E 上の正値対称な双線形形式 $f(x, y)$ から (1. 8. 5) により定められる関数 $E\to\mathbf{R}^+$ を考えると，ノルムの公理 **N1**, **N3** および中線定理 (1. 8. 3) を満たすことは容易に導ける。**N2** についても，双線形形式 f の対称性から Schwarz の不等式 $f(x, y)^2\leqslant f(x, x)f(y, y)$ が成り立つことにより容易に導ける。□

以下では，Euclid 空間において（1. 8. 4）により定められる正値対称な双線形形式 f の点（x, y）における値を $\langle x, y\rangle$ と記すことにする。

Euclid 空間の基底 $(e_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ が各 $1\leqslant i, j\leqslant n$ に対して

$$\langle e_i, e_j\rangle=\begin{cases}1(i=j), \\ 0(i\neq j)\end{cases}$$

を満たすとき，**正規直交基底**という。

定理 1. 8. 4 (i) Euclid 空間は正規直交基底を持つ。

(ii) $(e_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ を Euclid 空間 E の任意の正規直交基底，$x=\sum_{i=1}^{n}e_ix_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}e_iy_i$ を E の任意の二元（x_i, $y_i\in\mathbf{R}$）とすると

$$\langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

が成り立つ。

〔**証明**〕(i) E を次元 n の Euclid 空間とし，$(a_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ を E の基底とする。$b_k\in E(1\leqslant k\leqslant n)$ を k に関する帰納法により，1°) $b_k\neq\bar{0}$, 2°) $a_1, \cdots, a_k$ の線形結合であり，3°) 各 $1\leqslant i\leqslant k-1$ に対して $\langle b_k, b_i\rangle=0$ であるように定める：$b_1=a_1$ とし

(1.8.12) $\quad b_k=a_k-(b_1t_{k1}+\cdots+b_{k-1}t_{k,k-1})$,

(1.8.13) $\quad t_{ki}=\langle a_k, b_i\rangle/\langle b_i, b_i\rangle(1\leqslant i\leqslant k-1)$

とすると，帰納法の仮定により $b_1t_{k1}+\cdots+b_{k-1}t_{k,k-1}$ は $a_1, \cdots, a_{k-1}$ の線形結合であるから 2°) が成り立ち，また $a_1, \cdots, a_k$ は線形独立で，(1.8.12) の右辺における a_k の係数は 1 であるから $b_k\neq\bar{0}$ である。さらに，帰納法の仮定から $1\leqslant i, j\leqslant k-1$ かつ $i\neq j$ であるとき $\langle b_i, b_j\rangle=0$ であるから，(1.8.13) を用いれば各 $1\leqslant i\leqslant k-1$ に対して $\langle b_k, b_i\rangle=0$ であり，3°) が成り立つ。つぎに，$b_1t_1+\cdots+b_nt_n=\bar{0}(t_i\in\mathbf{R})$ とすると，各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して $\langle b_i, b_1t_1+\cdots+b_nt_n\rangle=t_i=0$ あるから $b_1, \cdots, b_n$ は線形独立であり，E の次元は n であったから $(b_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ は E の基底となる。したがって $(b_i/|b_i|)(1\leqslant i\leqslant n)$ は E の正規直交基底となる。

(ii)は明らかである。□

この定理の(i)の証明において用いた，ある基底から正規直交基底を作る方法を Schmidt の直交化法という。

命題 1. 8. 5 Euclid 空間 E は E 上の線形汎関数の集合 $\boldsymbol{L}(E;\ \mathbf{R})$ と距離同形である。

〔**証明**〕 $(e_i)\,(1\leqslant i\leqslant n)$ を E の正規直交基底，φ を $\boldsymbol{L}(E;\ \mathbf{R})$ の任意の元とすると，φ は n 個の実数 $\varphi(e_i)=y_i(1\leqslant i\leqslant n)$ により定まり，$y_\varphi=\sum_{i=1}^{n}e_iy_i$ とおくと線形汎関数 $x\mapsto\langle x,\ y_\varphi\rangle$ に等しい。写像

$$(1.8.14)\quad \Phi:\ \boldsymbol{L}(E;\ \mathbf{R})\to E,\qquad \varphi\longmapsto y_\varphi$$

を考えると，Φ は線形同形である。さらに $|\varphi(x)|=|\langle x,\ y_\varphi\rangle|\leqslant|x|\,|y_\varphi|$ から $\|\varphi\|\leqslant|y_\varphi|$ であり，この不等式と $|\varphi(y_\varphi)|=|y_\varphi|^2$ を合せて $\|\varphi\|=|y_\varphi|$ を得る。ゆえに

$$\Phi:\ \boldsymbol{L}(E;\ \mathbf{R})\approx E$$

が成り立つ。□

以下では $E,\ F$ を Euclid 空間とし，線形写像

$$f:\ E\to F$$

を考える。$E,\ F$ の Euclid ノルムで定まる正値対称な双線形形式（定理 1. 8. 3）の値をともに $\langle x,\ y\rangle(x,\ y\in E)$，$\langle x',\ y'\rangle(x',\ y'\in F)$ と記すことにする。

z を F の元とし，E 上の線形汎関数

$$E\longrightarrow R,\qquad x\mapsto\langle f(x),\ z\rangle$$

を考えると，前命題によりある $y\in E$ が一意的に存在して $\langle f(x),\ z\rangle=\langle x,\ y\rangle$ となる。そこで

$$F\to E,\qquad z\mapsto y$$

なる写像を ${}^tf$ と記すことにすると

(1.8.15) $\langle f(x),\ z\rangle=\langle x,\ {}^tf(z)\rangle$

なる関係が得られる。双線形形式 $E\times E\ni(x,\ y)\mapsto\langle x,\ y\rangle$, $F\times F\ni(x',\ y')\mapsto\langle x,\ y'\rangle$ の対称性から

(1.8.16) $\langle z,\ f(x)\rangle=\langle {}^tf(z),\ x\rangle$

も得られる。つぎに合成写像 ${}^tf\circ f\colon E\to E$ を考えると，これは線形であり，(1.8.15) および (1.8.16) により

(1.8.17) $\langle f(x),\ f(y)\rangle=\langle x,\ {}^tf\circ f(y)\rangle=\langle {}^tf\circ f(x),\ y\rangle$

が成り立つ。$u={}^tf\circ f$ とおいて (1.8.17) の後の等式を書くと，任意の x, $y\in E$ に対して

$$\langle u(x),\ y\rangle=\langle x,\ u(y)\rangle$$

が成り立つが，一般にこの性質をもつ Euclid 空間から同じ空間への線形写像は**対称変換**と呼ばれる。

線形代数の理論によればつぎの定理が成り立つ。

定理 1. 8. 6 E を Euclid 空間とし，$u\colon E\to E$ を対称変換とすると，E は u の固有ベクトルから成る正規直交基底を持つ。

この定理を用いると，線形写像 $f\colon E\to F$ のノルム $\|f\|$ と対称変換 ${}^tf\circ f\colon E\to E$ の固有値の間のある関係が得られる。

定理 1. 8. 7 E, F を Euclid 空間とし，$f\colon E\to F$ を線形写像，対称変換 ${}^tf\circ f\colon E\to E$ の固有値を $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m$ とすると，各 $\alpha_k\geqslant 0$ であり，$\|f\|^2=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\alpha_k$ が成り立つ。

〔**証明**〕 $(e_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ を ${}^tf\circ f$ の固有ベクトルから成る E の正規直交基底とし，各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して e_i は固有値 β_i に対する固有ベクトルであるとする。したがって，$m\leqslant n$ であって，二つの集合 $\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m\}$, $\{\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n\}$ は等しい。(1.8.17) を用いれば，任意の E の元 $x=\sum_{i=1}^n e_ix_i$ に対して $0\leqslant|f(x)|^2=\langle {}^tf\circ f(x),\ x\rangle=\langle\sum_{i=1}^n e_i\beta_ix_i,\ \sum_{j=1}^n e_jx_j\rangle=\beta_1(x_1)^2+\cdots+\beta_n(x_n)^2$

であるから，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $\beta_i \geqslant 0$ でなければならず，また $\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)|^2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta_i = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \alpha_k$ が成り立つ。□

（未完）