参考文献と結び

〔1〕 伊藤清三・小松彦三郎(編)：解析学の基礎，岩波書店，1977.
〔2〕 R. Abraham-J. E. Marsden: Foundations of Mechanics, Benjamin-Cummings, 1978.
〔3〕 H. Cartan: Cours de Calcul Différentiel, Hermann, 1977.
〔4〕 S. Lang: Real Analysis, Addison-Wesley, 1969.
〔5〕 F. and R. Nevanlinna: Absolute Analysis, Springer, 1973.
〔6〕 F. Rideau: Exercices de Calcul Différentiel, Hermann, 1979.
〔7〕 岩堀長慶(編): 微分積分学，裳華房，1983.

〔6〕は〔3〕を受けた問題集であるが，内容は豊富である。

〔7〕は本稿執筆中に知見し，いくつかの用語をこれにならった。

おわりに，遅筆の筆者を御督励下さった本誌編集委員会の吉岡教授と油井助教授にお礼申し上げる。

訂正：本誌第86号（昭和59年10月）所載の「Banach 空間における微分（I）」，頁1，8行目： F. and R. Nevalinna〔5〕→F. and R. Nevanlinna〔5〕.

等写像として

$$\Phi=(I-P)\circ g\circ(P\circ g)^{-1}:\ V\to\bigoplus_{j=p+1}^{n}e_j\mathbf{R}$$

とおく。定理 2. 8. 3 により Φは C^k 写像である。$U_1=U\cap h^{-1}(\Omega')$ とおけば，$x\in V$，$y\in\bigoplus_{j=p+1}^{n}e_j\mathbf{R}$ に対して $(x,\ y)\in M\cap U_1$ と $y=\Phi(x)$ は同等となる。実際，$(x,\ y)\in M\cap U_1\Rightarrow(x,\ y)=g\circ h(x,\ y)\Rightarrow y=(I-P)\circ g\circ h(x,\ y)$，$x=P\circ g\circ h(x,\ y)\Rightarrow\Phi(x)=\Phi\circ P\circ g\circ h(x,\ y)=y$。逆に，$y=\Phi(x)\Rightarrow(x,\ y)=(P\circ g\circ(P\circ g)^{-1}(x),\ (I-P)\circ g\circ(P\circ g)^{-1}(x))=g\circ(P\circ g)^{-1}(x)$ であり，$x\in V\Rightarrow(P\circ g)^{-1}(x)\in\Omega'$ に注意して $(x,\ y)\in M\cap U_1$ を得る。

(ii)⇒(iii)：U_2 として(ii)の U_1 をとり，$z\in U_2$ を $z=(x,\ y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^{n-p}$ と表す。写像 f：$U_2\to\mathbf{R}^{n-p}$ を $f(x,\ y)=y-\Phi(x)$ と定義すればよい。

(iii)⇒(i)：$f'(a)\in\boldsymbol{L}(\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}^{n-p})$ が全射であることから，$f'(a)e_1$，…，$f'(a)e_n$ の中に $n-p$ 個の線形独立なものが存在するが，もともと $f'(a)e_{p+1}$，…，$f'(a)e_n$ が線形独立であることを仮定しても一般性は損われない。これにより，$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^{n-p}$ と見なすと，$(\partial f/\partial y)(a)\in\boldsymbol{L}(\mathbf{R}^{n-p};\ \mathbf{R}^{n-p})$ は各 $e_j\ (p+1\leqslant j\leqslant n)$ を $f'(a)e_j$ へ移すから $(\partial f/\partial y)(a)$ は線形同形である。そこで，$a=(b,\ c)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^{n-p}$，各 $z\in\mathbf{R}^n$ を $(x,\ y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^{n-p}$ と表せば陰関数定理により，点 a の開近傍 U，点 b の開近傍 Ω，C^k 写像 φ：$\Omega\to\mathbf{R}^{n-p}$ が存在して，$(x,\ y)\in U$，$f(x,\ y)=\bar{0}$ と $x\in\Omega$，$y=\varphi(x)$ が同等となるから，g：$\Omega\to\mathbf{R}^n$ を $g(x)=(x,\ \varphi(x))$ と定義すればよい。実際，このとき g：$\Omega\to M\cap U$ は C^k 写像かつ全単射であり，U から $\mathbf{R}^p$ への射影を h とすれば，$M\cap U$ 上で $h=g^{-1}$ である。▯

定義 2. 10. 2 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 M が点 $a\in M$ において上の定理の性質を満たすとき，M は点 a で **p 次元 C^k 局所多様体**であるという。このとき，写像 g を**局所座標**という。

さらに，Mが **p 次元 C^k 多様体**であるとは，Mがその各点において p 次元 C^k 局所多様体であることをいう。

写像 g で，各 $x \in M$ に対して $f(x)=g(x)$ を満たすものが存在することである。

定理 2. 10. 2　$\mathbf{R}^n$ の部分集合 M と点 $a \in M$ についての以下の性質は互いに同等である。p は $1 \leqslant p \leqslant n$ を満たす整数である。

(i)　点 a の開近傍 $U(\subset \mathbf{R}^n)$，$F=\mathbf{R}^p$ の開部分集合 Ω，および C^k 同形 $g: \Omega \to M \cap U$ が存在する。(このとき，上の定義により $M \cap U$ を含む開集合から F への C^k 写像 h で，$M \cap U$ 上で $h=g^{-1}$ を満たすものが存在する。)

(ii)　$\mathbf{R}^n$ の標準基底 $(e_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ の指標 1, …, n を適当に置き換え，$\mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ と見なし，$a=(b,\ c) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ とおく。このとき，点 a の開近傍 $U_1(\subset \mathbf{R}^n)$，および点 b の開近傍 $V(\subset \mathbf{R}^p)$ から $\mathbf{R}^{n-p}$ への C^k 写像 Φ が存在して，$x \in V$，$y \in \mathbf{R}^{n-p}$ に対して $(x,\ y) \in M \cap U_1$ と $y=\Phi(x)$ とが同等となるものが存在する。

(iii)　点 a のある開近傍 $U_2(\subset \mathbf{R}^n)$ から $\mathbf{R}^{n-p}$ への C^k 写像 f で，任意の $z \in U_2$ に対して $f(z)=\bar{0}$ は $z \in M \cap U_2$ と同等であって，$f'(a) \in \boldsymbol{L}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^{n-p})$ が全射であるものが存在する。

〔**証明**〕　(i)⇒(ii): $\lambda=h(a) \in \Omega$ とおく。$h'(a) \circ g'(\lambda)$ は F の恒等写像であるから，$h'(a)(\mathbf{R}^n)=F$ であり，したがって F は

(2.10.3)　$h'(a)e_1,\ \cdots,\ h'(a)e_n$

の中のある p 個で生成される。そこで，$(e_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ の指標 1, …, n を置き換え，F が (2.10.3) のはじめの p 個で生成されるようにする。この結果，$\mathbf{R}^n$ の部分空間 $K=\{y \in \mathbf{R}^n : h'(a)y=\bar{0}\}$ は $\bigoplus_{j=p+1}^{n} e_j\mathbf{R}$ に等しく

(2.10.4)　$g'(\lambda) \circ h'(a)e_i \in e_i+K,\ 1 \leqslant i \leqslant p$

である。$P: \mathbf{R}^n \to \bigoplus_{i=1}^{p} e_i\mathbf{R}$ を射影とすると，(2.10.4) より $P \circ g'(\lambda) \circ h'(a) e_i=e_i(1 \leqslant i \leqslant p)$ であるから，$(P \circ g)'(\lambda)=P \circ g'(\lambda) : F \to \bigoplus_{i=1}^{p} e_i\mathbf{R}$ は線形同形である。よって逆写像定理により，点 λ における局所 C^k 同形 $P \circ g: \Omega' \to V(\subset \bigoplus_{i=1}^{p} e_i\mathbf{R})$ が存在するから ($\Omega'(\subset \Omega)$ は λ の開近傍)，I を $\mathbf{R}^n$ の恒

$$\Phi'(a,\ b)=\begin{bmatrix} I_E & \bar{0} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b) \end{bmatrix}$$

と書くと見易い。そしてこれは逆写像を持つ：

$$\Phi'(a,\ b)^{-1}=\begin{bmatrix} I_E & \bar{0} \\ -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)\right)^{-1}\circ\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b) & \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)\right)^{-1} \end{bmatrix}。$$

すなわち，$(u,\ w)\in E\times G$ に対し

$$\Phi'(a,\ b)^{-1}(u,\ w)=\left(u, \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)\right)^{-1}\circ\left(w-\frac{\partial f}{\partial x}(a,\ b)\right)\right)$$

である。なお，ここで I_E は E の恒等写像である。そこで，この写像 Φ に逆写像定理を適用すると，点 $(a,\ b)\in E\times F$ の開近傍 $V(\subset U)$，点 $(a,\ \bar{0})\in E\times G$ の開近傍 W_1 で

$$\Phi:\ V\to W_1$$

を C^k 同形とするものが存在するから，$h(x)=(x,\ \bar{0})$ を標準単射 $E\to E\times G$, $\pi(x,\ y)=y$ を射影 $E\times F\to F$ とし，$W=h^{-1}(W_1)$ とおいて，写像

(2.10.2) $\quad g=\pi\circ\Phi^{-1}\circ h:\ W\to F$

が定義出来，明らかに $a\in W$ であり，また h の連続性から W は開集合である。以上で定義した V, W, g に対する (i), (ii) の同等性は容易に検証できる。

また，$(V',\ W',\ g_1)$ については，$(V,\ W,\ g)$ の場合と同じ (2.10.1) の Φ を用いて (2.10.2) のごとく $g_1: W'\to F$ が定義されるから，明らかに，$x\in W\cap W'$ に対して $g(x)=g_1(x)$ である。□

10. 2 Euclid 空間の多様体の定義

定義 2. 10. 1 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 M から $\mathbf{R}^m$ への写像 f が **C^k 級**，あるいは **C^k 写像**であるとは，M を含む開集合 $U(\subset\mathbf{R}^n)$ から $\mathbf{R}^m$ への C^k

(iii) $\mathrm{Isom}(E; F)$ から $\boldsymbol{L}(F; E)$ への写像 $u \mapsto u^{-1}$

を合成して得られ，これら三つの写像の連続性により g' も連続であるから，gは C^1 写像である。そして，帰納法の仮定であるgが C^{n-1} 写像であることを用いると，f' は C^{n-1} 写像で，(iii)の写像は定理 2. 8. 4 により C^∞ 写像であるから，定理 2. 8. 3 により g' は C^{n-1} 写像であることが導かれる。ゆえにgは C^n 写像である。□

§10 陰関数定理と多様体の定義

10. 1 陰関数定理

定理 2. 10. 1（陰関数定理） E, F, Gを Banach 空間，Uを $E\times F$ の開部分集合，f: $U\to G$ を C^k 写像とする。点 $(a, b)\in U$ において

$$f(a, b)=\bar{0},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\in \mathrm{Isom}(F; G)$$

が成り立つとき，点 (a, b) の開近傍 $V(\subset U)$，点aの開近傍$W(\subset E)$，C^k 写像

$$g: W\to F$$

で，以下の二条件を同等とするものが存在する：

(i) $(x, y)\in V$ かつ $f(x, y)=\bar{0}$;

(ii) $x\in W$ かつ $y=g(x)$。

さらに，上の (V, W, g) のほかに (V', W', g_1) で(i), (ii)を満たすものがあれば，各 $x\in W\cap W'$ に対して$g(x)=g_1(x)$ が成り立つ。

〔証明〕 C^k 写像

$$(2.10.1)\quad \begin{aligned} \Phi: U &\longrightarrow E\times G \\ (x, y) &\mapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

を考える。微分 $\Phi'(a, b)\in \boldsymbol{L}(E\times F; E\times G)$ は

となっている。

以下に，写像 (2. 9. 6) が C^n 同形であることを証明する。$\mathrm{Isom}(E;F)$ は $\boldsymbol{L}(E;F)$ の開部分集合であるから (I, p. 11, 定理 1. 4. 2, (a)) $f': U \to \boldsymbol{L}(E;F)$ の連続性により点 a のある近傍において $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$ が成り立ち，したがってあらかじめ $r>0$ を十分小さくとっておくことにより，V において $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$ が成り立つと仮定して一般性は失われない。そこで，はじめに $y_0, y_1 \in W$ に対し，$x_0 = g(y_0)$, $x_1 = g(y_1)$ とおいて

(2. 9. 7) $\quad |g(y_1) - g(y_0) - (f'(x_0))^{-1}(y_1 - y_0)| = o(|y_1 - y_0|), \ y_1 \to y_0$

すなわち，$g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$ を証明する。(2. 9. 4), (2. 9. 5) から

$$
\begin{aligned}
&(1-k)|x_1 - x_0| = |x_1 - x_0| - k|x_1 - x_0| \\
&\leqslant |x_1 - x_0| - |\varphi(x_1, b) - \varphi(x_0, b)| \\
&\leqslant |\lambda^{-1}(f(x_1) - f(x_0))| \leqslant \|\lambda^{-1}\| |y_1 - y_0|
\end{aligned}
$$

を得るから，$y_1 \to y_0$ とすると $x_1 \to x_0$ であり，さらに

$$
|f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0)| = |x_1 - x_0| \alpha(|x_1 - x_0|)
$$

とおくと，$y_1 \to y_0$ のとき $\alpha(|x_1 - x_0|) \to 0$ であることがわかる。そして

$$
\begin{aligned}
&|g(y_1) - g(y_0) - (f'(x_0))^{-1}(y_1 - y_0)| \\
&\leqslant \|(f'(x_0))^{-1}\| |y_1 - y_0 - f'(x_0)(x_1 - x_0)| \\
&= \|(f'(x_0))^{-1}\| |x_1 - x_0| \alpha(|x_1 - x_0|) \\
&\leqslant (\|(f'(x_0))^{-1}\| \|\lambda^{-1}\| / (1-k)) |y_1 - y_0| \alpha(|x_1 - x_0|)
\end{aligned}
$$

から (2. 9. 7) が得られる。最後に，g は C^n 写像であることを，n に関する帰納法によって証明する。写像

$$
\begin{aligned}
g' : W &\longrightarrow \boldsymbol{L}(F;E) \\
y &\longmapsto (f'(g(y)))^{-1}
\end{aligned}
$$

は

(i) $g: W \to V$;

(ii) $f': V \to \boldsymbol{L}(E;F)$;

〔**証明**〕 $\lambda=f'(a)$ とおく。仮定により $\lambda^{-1}\in\mathrm{Isom}(F;\ E)$ が存在するから，点 $(a,\ b)\in E\times F$ $(b=f(a))$ の近傍で写像

(2. 9. 4) $\varphi(x,\ y)=x-\lambda^{-1}\circ(f(x)-y)$

を考えることができる。そして

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,\ y)=I_E-\lambda^{-1}\circ f'(a)=\bar{0},\ I_E\text{ は }E\text{ の恒等写像}$$

が成り立つから，実数 k を $0<k<1$ を満たすように選べば，f' の連続性によって，実数 $r>0$ で $|x-a|<r$ を満たす任意の x に対し $\|(\partial\varphi/\partial x)(x,\ y)\|\leqslant k$ となるものが存在する。したがって，任意の $x_1,\ x_2\in B(a,\ r)=\{x\in E\colon |x-a|<r\}$ に対し，有限増分定理により

(2. 9. 5) $$\begin{aligned}&|\varphi(x_1,\ y)-\varphi(x_2,\ y)|\\ &\leqslant|x_1-x_2|\sup_{0<t<1}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1+(x_2-x_1)t,\ y)\right\|\\ &\leqslant k|x_1-x_2|\end{aligned}$$

が成り立ち，また $|y-b|<(1-k)r/\|\lambda^{-1}\|$ を満たす $y\in F$ に対しては

$$|\varphi(a,\ y)-a|=|\lambda^{-1}(y-b)|\leqslant\|\lambda^{-1}\|\,|y-b|<(1-k)r$$

が成り立つ。以上は，$W=\{y\in F\colon |y-b|<(1-k)r/\|\lambda^{-1}\|\}$ の任意の点 y を固定して，写像

$$\begin{aligned}\varphi_y\colon B(a,\ r)&\longrightarrow E\\ x&\longmapsto\varphi(x,\ y)\end{aligned}$$

を考えると，φ_y は補題の条件 (2. 9. 1)，(2. 9. 2) を満たすことを示し，したがって φ_y の不動点が $B(a,\ r)$ の中にただ一つ存在することがわかる。そこで，W の各点 y に φ_y の不動点 x を対応させる写像を考え，これを $g\colon W\to B(a,\ r)$ とすると，$x=g(y)$，すなわち $\varphi_y(x)=x$ は (2.9.4) により $y=f(x)$ と同等であるから，g は写像

(2. 9. 6) $f\colon V=B(a,\ r)\cap f^{-1}(W)\longrightarrow W$

の逆写像であることがわかる。ここで，点 a は写像 φ_b の不動点であるので V の点であり，f の連続性から V は E の開集合であるから点 a の開近傍

$$(2.9.3)\quad |x_n-a|=\Big|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\Big|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|\leqslant |x_1-a|/(1-k)$$
を得，(2. 9. 1) と合せれば $|x_n-a|<r$ を得るから，$f^n(a)\,(n\geqslant 1)$ が定義可能である。そこで，U 内の点列 $(x_n)\,(0\leqslant n)$ を考える。
$$|x_{n+m}-x_n|\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+m}|x_i-x_{i-1}|\leqslant |x_1-a|\sum_{i=n+1}^{n+m}k^{i-1}$$
$$\leqslant (1-k)r(k^n+k^{n+1}+\cdots)=rk^n$$
を得るから，(x_n) は Cauchy 列であり，Eの完備性からある点 $z\in E$ に収束する。そして，(2. 9. 3) から $|z-a|\leqslant |x_1-a|/(1-k)$ を得るから $z\in U$ であることがわかる。さらに，任意の $n\geqslant 1$ に対して
$$|f(z)-z|\leqslant |f(z)-f(x_n)|+|x_{n+1}-z|$$
が成り立ち，(2. 9. 2) により f は U で連続であるから，上式において $n\to\infty$ とすることにより $f(z)=z$ を得る。

最後に f の不動点の一意性を示す。$z'\in U$ を $f(z')=z'$ を満たす点とすると
$$|z-z'|=|f(z)-f(z')|\leqslant k|z-z'|$$
で，$k<1$ であったから $z=z'$ でなければならない。□

定義 2. 9. 1 U, V をそれぞれ E, F の開集合とする。全単射 f: $U\to V$ が C^n 級，かつ逆写像 f^{-1} も C^n 級であるとき，f を $\boldsymbol{C^n}$ **同形**という。

また，写像 f: $U\to F$ について，点 $a\in U$ の開近傍 $V(\subset U)$ と点 $f(a)$ の開近傍 W で，f: $V\to W$ を C^n 同形とするものが存在するとき，f は点 a で**局所** $\boldsymbol{C^n}$ **同形**であるという。

つぎの定理は，**局所逆写像定理**または**逆写像定理**と呼ばれる。

定理 2. 9. 1 C^n 写像 f: $U\to F$ が，点 $a\in U$ において
$$f'(a)\in \mathrm{Isom}(E;\ F)$$
を満たすならば，点 a で局所 C^n 同形である。

法の仮定を用いて (2. 8. 6) を証明する。

(2. 8. 7) $\varphi(h)=f(a+h)-f(a)-f'(a)h-\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(h)^n$

とおくと，補題により

$$\varphi'(h)=f'(a+h)-f'(a)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(h)^{n-1}$$

を得るから，帰納法の仮定を写像 f' に適用して

$$\|\varphi'(h)\|=o(|h|^{n-1}),\ \ h\to\bar{0}$$

を得る。したがって，有限増分定理によれば

$$|\varphi(h)-\varphi(\bar{0})|\leqslant|h|\sup_{0<t<1}\|\varphi'(ht)\|$$

であるから，$\varphi(\bar{0})=\bar{0}$ に注意すると

$$|\varphi(h)|=|h|o(|h|^{n-1})=o(|h|^n),\ \ h\to\bar{0}$$

を得る。これは証明すべき関係式 (2. 8. 6) にほかならない。□

註 (2. 8. 6) は **Taylor の**公式の一つの形である。

§9 逆写像定理

この§では，E, F は Banach 空間であり，UはEの開集合である。

補題（不動点定理） kを $0<k<1$ を満たす実数， U をここでは開球 $\{x\in E:\ |x-a|<r\}\ (a\in E,\ r>0)$ とする。写像 $f:\ U\to E$ が二条件：

(2. 9. 1) $|f(a)-a|<(1-k)r$

および，任意の x, $y\in U$ に対して

(2. 9. 2) $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$

を満たすならば，Uの点 z で $f(z)=z$ を満たすものがただ一つだけ存在する。（このような点 z を f の不動点という。）

〔**証明**〕 $x_0=a$, $x_n=f^n(a)\,(=\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{n\text{個}}(a))\,(n=1,\ 2\cdots)$ とおく。実際，(2. 9. 2) により $|x_i-x_{i-1}|\leqslant k^{i-1}|x_1-a|\ (i\geqslant 1)$ であることに注意すると

ある。□

8. 3 Taylor の公式

E, F を Banach 空間とする。対称な n 重線形写像 $\varphi \in \boldsymbol{L}_n(E; F)$ について，$h_1=\cdots=h_n=h\in E$ であるとき $\varphi(h_1, \cdots, h_n)$ を $\varphi((h)^n)$ と記すことにする。さらに，線形写像 $k \mapsto \varphi(k, h, \cdots, h)$ $(k\in E)$ を $\varphi((h)^{n-1})$ と記すことにする。

補題 上の記号を用いると，写像

$$\psi: E \longrightarrow F$$
$$h \mapsto \varphi((h)^n)$$

の点 h における微分は

(2. 8. 5) $\psi'(h)=n\varphi((h)^{n-1})$

で与えられる。

〔証明〕 線形写像 $\Delta(h)=(h, \cdots, h)\in E^n$ を用いると $\psi(h)=\varphi\circ\Delta(h)$ と表せるから，(2. 2. 2) により

$$\begin{aligned}\psi'(h)k&=\varphi'(\Delta(h))\Delta(k)\\&=\varphi(k, h, \cdots, h)+\varphi(h, k, h, \cdots, h)+\cdots+\varphi(h, \cdots, h, k)\end{aligned}$$

を得る。φ の対称性により $\psi'(h)k=n\varphi(k, h, \cdots, h)$
であるから (2. 8. 5) が成り立つ。□

定理 2. 8. 5 U を E の開部分集合とする。$f: U\to F$ が C^{n-1} 写像で，点 $a\in U$ において n 回微分可能ならば

(2. 8. 6) $$|f(a+h)-f(a)-f'(a)h-\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(h)^n|=o(|h|^n),\quad h\to\bar{0}$$

が成り立つ。

〔証明〕 n に関する帰納法により証明する。微分の定義式 (2. 1. 3)

$$|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|=o(|h|)$$

は，(2. 8. 6) が $n=1$ のとき成り立つことを示す。そこで，以下に帰納

級であることを示す。写像

$$\varphi:\ U\to \boldsymbol{L}(F;\ G)\times \boldsymbol{L}(E;\ F)$$
$$x\longmapsto (g'(f(x)),\ f'(x)),$$
$$\psi:\ \boldsymbol{L}(F;\ G)\times \boldsymbol{L}(E;\ F)\to \boldsymbol{L}(E;\ G)$$
$$(v,\ u)\longmapsto v\circ u$$

を考えると，f, g' とも C^{n-1} 級ゆえ，帰納法の仮定により写像 $x\mapsto g'(f(x))$ は C^{n-1} 級であり，よって φ は C^{n-1} 級。また，ψ は連続双線形写像ゆえ，定理 2. 8. 2 によって C^∞ 級である。そして，$h'(x)=\psi\circ\varphi(x)$ と表せるが，これに帰納法の仮定を適用し，h' が C^{n-1} 級であることが結論される。□

定理 2. 8. 4 E, F を Banach 空間とする。写像

$$\Phi:\ \mathrm{Isom}(E;\ F)\to \boldsymbol{L}(F;\ E)$$
$$f\longmapsto f^{-1}$$

は C^∞ 級である。

〔**証明**〕 帰納法により，任意の整数 $n\geqq 1$ に対して Φ が C^n 写像であることを示す。定理 2. 2. 3 によれば，Φ は C^1 級であり

$$\Phi'(f)h=-f^{-1}\circ h\circ f^{-1},\ h\in \boldsymbol{L}(E;\ F)$$

であるが，以下ではこの等式と帰納法の仮定を用いて Φ' が C^{n-1} 級であることを示す。写像 $\psi:\ \boldsymbol{L}(F;E)\times \boldsymbol{L}(F;\ E)\to \boldsymbol{L}(\boldsymbol{L}(E;F);\boldsymbol{L}(F;E))$ を

$$\psi(g,\ k)h=-g\circ h\circ k,\ g,\ k\in \boldsymbol{L}(F;\ E),\ h\in \boldsymbol{L}(E;\ F)$$

により定義すると

$$\Phi'(f)=\psi(\Phi(f),\ \Phi(f))$$

と表せ，さらに $\Delta:\ \boldsymbol{L}(F;\ E)\to \boldsymbol{L}(F;\ E)\times \boldsymbol{L}(F;\ E)$ を $\Delta(g)=(g,\ g)$ で定義される写像とすれば $\Phi'=\psi\circ\Delta\circ\Phi$ と表せる。ここで，Φ は帰納法の仮定により C^{n-1} 級，Δ と ψ はそれぞれ連続線形写像と連続双線形写像であるからともに C^∞ 級であり，よって定理 2. 8. 3 より Φ' は C^{n-1} 級で

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_m\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_2\cdots\sigma_n \\ \sigma_1\sigma_m\sigma_3\cdots\sigma_2\cdots\sigma_n \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_m\sigma_3\cdots\sigma_2\cdots\sigma_n \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_m\cdots\sigma_n \end{pmatrix}。$$

ここで，各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して $\sigma(i)=\sigma_i$ である。したがって，以下の第一，第三の等号が (2. 8. 3) から，また第二の等号が (2. 8. 2) によって得られる：

$$\begin{aligned} &f^{(n)}(a)(h_1, \cdots, h_n) \\ &=f^{(n)}(a)(h_{\pi(1)}, \cdots, h_{\pi(n)}) \\ &=f^{(n)}(a)(h_{\varepsilon\pi(1)}, \cdots, h_{\varepsilon\pi(n)}) \\ &=f^{(n)}(a)(h_{\rho\varepsilon\pi(1)}, \cdots, h_{\rho\varepsilon\pi(n)})。\ \square \end{aligned}$$

8. 2　高階導写像をもつ写像の例

定理 2. 8. 2　E_1, E_2, F を Banach 空間とする。連続双線形写像 $f\in \boldsymbol{L}(E_1, E_2; F)$ は C^∞ 写像である。

〔**証明**〕　定理 2. 2. 2 により a, $h\in E_1$, b, $k\in E_2$ に対して

$$f'(a, b)(h, k)=f(h, b)+f(a, k)$$

が成り立つが，これは写像 $f'\colon E_1\times E_2\to \boldsymbol{L}(E_1\times E_2; F)$ が線形であることを示す。したがって，$f''(a, b)\in \boldsymbol{L}_2(E_1\times E_2; F)$ は (a, b) に依存しない定値写像

$$f''(a, b)((h_1, k_1), (h_2, k_2))=f'(h_1, k_1)(h_2, k_2)$$

であり，f'' は C^∞ 写像である。したがって，f も C^∞ 写像である。$\square$

定理 2. 8. 3　E, F, G を Banach 空間，U, V をそれぞれ E, F の開部分集合とする。写像 $f\colon U\to V$, $g\colon V\to G$ が C^n 級ならば，合成写像 $h=g\circ f\colon U\to G$ も C^n 級である。

〔**証明**〕　n に関する帰納法により証明する。$n=1$ のときは連鎖律

(2. 8. 4)　$h'(x)=g'(f(x))\circ f'(x)$, $x\in U$

から定理が成り立つ。そこで，以下では帰納法の仮定をもとに h' が C^{n-1}

$$(f^{(n)}(a)h_1)h_2=((f^{(n-2)})''(a)h_1)h_2$$
$$=((f^{(n-2)}(a))''h_2)h_1=(f^{(n)}(a)h_2)h_1$$

を得るから，(2. 8. 2) が成り立つことがわかる。

つぎに，$\{1, \cdots, n\}$ の置換 τ が $\tau(1)=1$ であるとき，任意の n 個の元 $h_1, \cdots, h_n\in E$ に対して

(2. 8. 3)　$f^{(n)}(a)(h_1, h_2, \cdots, h_n)=f^{(n)}(a)(h_1, h_{\tau(2)}, \cdots, h_{\tau(n)})$

が成り立つことを示す。各 $u\in \boldsymbol{L}_{n-1}(E; F)$ に対し $\varphi: u\mapsto u(h_2, \cdots, h_n)$, $\varphi_\tau: u\mapsto u(h_{\tau(2)}, \cdots, h_{\tau(n)})$ なる写像 $\boldsymbol{L}_{n-1}(E; F)\to F$ を考えると，帰納法の仮定により各 $x\in U$ に対して

$$\varphi(f^{(n-1)}(x))=f^{(n-1)}(x)(h_2, \cdots, h_n)$$
$$=f^{(n-1)}(x)(h_{\tau(2)}, \cdots, h_{\tau(n)})$$
$$=\varphi_\tau(f^{(n-1)}(x))$$

が成り立つ。φ, φ_τ はともに連続線形写像であるから，任意の $u\in \boldsymbol{L}_{n-1}(E; F)$ に対して $\varphi'(u)=\varphi$, $\varphi_\tau'(u)=\varphi_\tau$ であり，したがって，連鎖律により

$$\varphi\circ f^{(n)}(a)h_1=(\varphi\circ f^{(n-1)})'(a)h_1$$
$$=(\varphi_\tau\circ f^{(n-1)})'(a)h_1$$
$$=\varphi_\tau\circ f^{(n)}(a)h_1$$

を得るがこれは (2. 8. 3) にほかならない。

ところで，$\{1, \cdots, n\}$ の任意の置換は，(2. 8. 2) および (2. 8. 3) で考えた置換を組み合せて得られるから，(2. 8. 1) は (2. 8. 2) および (2. 8. 3) から導かれる。たとえば，$\sigma(1)=1$ あるいは $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$ の場合には σ はそれぞれ (2. 8. 3)，(2. 8. 2) に現れる置換と同じものになるから，$\sigma(m)=1$, $2<m\leqslant n$ の場合を考えると，σ は以下の三つの置換 π, ε, ρ の合成であることがわかる：

$$\pi=\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \cdots m \cdots n \\ \sigma_m \sigma_1 \sigma_3 \cdots \sigma_2 \cdots \sigma_n \end{pmatrix},$$

で微分可能であるとき，fは点aにおいて$\boldsymbol{n}$**回微分可能**であるといい，この微分を f の点 a における $\boldsymbol{n}$ **回微分**といって $f^{(n)}(a)$ で表す。これは$\boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}_{n-1}(E;\ F))$ の元である。

$h_1,\ \cdots,\ h_n$ がEの元であるとき，$f^{(n)}(a): E\times\cdots\times E\to F$ の点 $(h_1,\ \cdots,\ h_n)\in E\times\cdots\times E$ における値を $f^{(n)}(a)(h_1,\ \cdots,\ h_n)$ と記すことにする。

定義 2. 8. 2　写像 f: $U\to F$ がUの各点でn回微分可能で，かつn階導写像

$$f^{(n)}: U\to \boldsymbol{L}_n(E;\ F)$$

が連続であるとき，fは $\boldsymbol{C}^n$ **級**である，あるいは $\boldsymbol{C}^n$ **写像**であるという。

便宜上，$f^{(0)}=f$ とし，fの0階導写像はf自身であるものとする。そして，fが連続であるとき $\boldsymbol{C}^0$ **級**である，あるいは $\boldsymbol{C}^0$ **写像**であるという。

定義 2. 8. 3　写像 f: $U\to F$ がすべての整数 $n\geqq 0$ に対して C^n 級であるとき，fは $\boldsymbol{C}^\infty$ **級**である，あるいは $\boldsymbol{C}^\infty$ **写像**であるという。

定理 2. 8. 1　写像 f: $U\to F$ が点 $a\in U$ でn回微分可能ならば，n回微分 $f^{(n)}(a)\in \boldsymbol{L}_n(E;\ F)$ は対称なn重線形写像である。すなわち，集合 $\{1,\ \cdots,\ n\}$ の任意の置換σに対し

$$(2.\,8.\,1)\quad f^{(n)}(a)(h_1,\ \cdots,\ h_n)=f^{(n)}(a)(h_{\sigma(1)},\ \cdots,\ h_{\sigma(n)}),\qquad h_1,\ \cdots,\ h_n\in E$$

が成り立つ。

〔**証明**〕　nに関する帰納法により証明する。はじめに，任意のn個の元 $h_1,\ \cdots,\ h_n\in E$ に対し

$$(2.\,8.\,2)\quad f^{(n)}(a)(h_1,\ h_2,\ h_3,\ \cdots,\ h_n)=f^{(n)}(a)(h_2,\ h_1,\ h_3,\ \cdots,\ h_n)$$

が成り立つことを示す。$\boldsymbol{L}_n(E;\ F)\approx \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}_{n-2}(E;\ F)))$ であることから，$(f^{(n)}(a)h_1)h_2\in \boldsymbol{L}_{n-2}(E;\ F)$ であり，したがって

$$f^{(n)}(a)(h_1,\ \cdots,\ h_n)=(f^{(n)}(a)h_1)h_2\cdot(h_3,\ \cdots,\ h_n)$$

が成り立つ。そして，定理 2. 7. 3 を用いて

外の各成分を $\bar{0}$ にすれば

$$(f''(a)h_i)k_j=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\right)k_j$$

である。定理 2.7.3 により $(f''(a)h_i)k_j=(f''(a)k_j)h_i$ であるから (2.7.16) が得られる。

(ii)は(i)から明らかである。□

E が n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の場合には，$E_1=\cdots=E_n=\mathbf{R}$ として上述の結果が適用できる。この場合，$\boldsymbol{L}(E_i;F)=\boldsymbol{L}(\mathbf{R};F)\approx F$, $\boldsymbol{L}(E_i;\boldsymbol{L}(E_j;F))\approx F$ であるから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\in F$$

となり，(2.7.16) において $h_i=k_j=1$ とおくことによりつぎの命題を得る：

命題 2.7.7 Eが Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の場合には各 $1\leqslant i$, $j\leqslant n$ に対し

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a) \tag{2.7.18}$$

が成り立つ。

§8 高階導写像

この§では，E, F を Banach 空間，UをEの開部分集合，$f\colon U\to F$ を写像とする。

以下では，$\boldsymbol{L}(E,E;F)$ を $\boldsymbol{L}_2(E;F)$ と記し，また一般に，整数 $n>0$ に対して $\boldsymbol{L}(\overbrace{E,\cdots,E}^{n\text{個}};F)$ を $\boldsymbol{L}_n(E;F)$ と記す。

8.1 定義

定義 2.8.1 点 $a\in U$ における f の n 回微分 $f^{(n)}(a)\in\boldsymbol{L}_n(E;F)$ $(n\geqslant 2)$ を，以下のようにnに関する帰納法で定義する：f がUの各点で $n-1$ 回微分可能で，$n-1$ 階導写像 $f^{(n-1)}\colon U\to\boldsymbol{L}_{n-1}(E;F)$ が点 $a\in U$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_j\circ\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)h_i=\varphi_j\circ\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\right)k_j \quad \square$$

定理 2. 7. 6 E を閉部分空間 E_1, $\cdots$, E_n の直和 Banach 空間, $f\colon U\to F$ を微分可能な写像とする。f が点 $a\in U$ で2回微分可能ならば

$$(2.7.14)\quad (f''(a)h)k=\sum_{i,\ j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\right)k_j$$

である。ここで, $h=\sum_{i=1}^{n}h_i$, $k=\sum_{j=1}^{n}k_j\in E$, $h_i\in E_i$, $k_j\in E_j$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$ とする。

〔**証明**〕 g_j を補題 2. 7. 5 で定義した写像とすると, (2.4.12) により

$$f'(x)k=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)k_j=\sum_{j=1}^{n}g_j(x),$$

$$(f''(a)h)k=\sum_{j=1}^{n}g_j'(a)h=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i。$$

ここで, (2.7.13) を用いれば求める式 (2.7.14) が得られる。$\square$

註 写像 $(h,\ k)\mapsto(h_i,\ k_j)$ を $(dx_i,\ dx_j)$ と記すことにすると, (2.7.14) は

$$(2.7.15)\quad f''(a)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial y_j}(a)(dx_i,\ dx_j)$$

と書くことができる。

系 (i) 任意の $h_i\in E_i$, $k_j\in E_j$ に対して

$$(2.7.16)\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\right)k_j=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)k_j\right)h_i$$

(ii) $E_i\times E_i$ から F への双線形写像

$(\partial^2 f/(\partial x_i\partial x_i))(a)$ (以下では $(\partial^2 f/(\partial x_i)^2)(a)$ とも記す) は対称である。すなわち, 任意の h_i, $k_i\in E_i$ に対して

$$(2.7.17)\quad \left(\frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a)h_i\right)k_i=\left(\frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a)k_i\right)h_i$$

が成り立つ。

〔**証明**〕 等式 (2.7.14) において, h, k のそれぞれ i 成分, j 成分以

を得るが，これは求める式（2.7.10）である。□

7. 2　偏微分

Banach 空間 E が，閉部分空間 E_1，…，E_n の直和 Banach 空間である場合を考える。微分可能な写像 $f\colon U\to F$ は，点 $a\in U$ で2回微分可能であるものとし，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$ としよう。写像

$$(2.7.11)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}\colon U\to \boldsymbol{L}(E_j;\ F)$$

は（2.4.10）により導写像 $f'\colon U\to\boldsymbol{L}(E;\ F)$ と写像

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{L}(E;\ F) & \to & \boldsymbol{L}(E_j;\ F)\\ u & \longmapsto & u\circ e_j\end{array}$$

（$e_j\colon E_j\to E$ は標準単射）との合成写像と見なせる。したがって，f の点 a における2回微分可能性により，$\partial f/\partial x_j$ は点 a で微分可能であり，とくに点 a での第 i 偏微分は

$$(2.7.12)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\in\boldsymbol{L}(E_i;\ \boldsymbol{L}(E_j;\ F))$$

である。なお，記号 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$ は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ と書くのが習慣である。$h_i\in E_i$，$k_j\in E_j$ とすると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\in\boldsymbol{L}(E_j;\ F),\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\right)k_j\in F$$

である。

補題 2. 7. 5　写像 $x\mapsto(\partial f/\partial x_j)(x)k_j$，$(x\in U)$ を g_j で表せば

$$(2.7.13)\qquad \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i\right)k_j$$

である。

〔**証明**〕　命題 2. 7. 1 とほぼ同様に証明できる。すなわち，g_j は写像 $\partial f/\partial x_j\colon U\to\boldsymbol{L}(E_j;\ F)$ と $\varphi_j(u)=u(k_j)\in F$，$(u\in\boldsymbol{L}(E_j;\ F))$ の合成写像であり，φ_j は連続線形写像であるから

$$B'(ht)=f'(a+ht+k)-f'(a+ht)-f'(a+k)+f'(a)$$
$$=|ht+k|\alpha(ht+k)-|ht|\beta(ht)-|k|\gamma(k),$$
$$|B'(ht)|\leqslant|ht+k||\alpha(ht+k)|+|ht||\beta(ht)|+|k||\gamma(k)|$$

であり，$0<t<1$ であるから，$|ht+k|$, $|ht|$, $|k|$ はいずれも $\leqslant|h|+|k|$ である。(2. 7. 9) と合せて (2. 7. 8) が得られ，証明が完成した。□

定理 2. 7. 4 E, F, G を Banach 空間，U, V をそれぞれ E, F の開部分集合，f: $U\to V$, g: $V\to G$ を C^1 写像とする。f が点 $a\in U$ で，また g が点 $b=f(a)\in V$ で 2 回微分可能ならば，合成写像 $h=g\circ f$: $U\to G$ も点 a で 2 回微分可能であり，x_1, $x_2\in E$ に対して

$$(2.7.10)\quad h''(a)(x_1,\ x_2)=g''(b)(f'(a)x_1,\ f'(a)x_2)+g'(b)\circ f''(a)(x_1,\ x_2)$$

が成り立つ。

〔**証明**〕 連鎖律によれば

$$h'(x)x_2=g'(f(x))\circ f'(x)x_2,\ x\in U$$

であるが，この写像 $x\mapsto h'(x)x_2$ は，二つの写像

$$\varphi:\ U\longrightarrow \boldsymbol{L}(F;\ G)\times F$$
$$x\ \mapsto\ (g'(f(x)),\ f'(x)x_2)$$

および

$$\psi:\ \boldsymbol{L}(F;\ G)\times F\to G$$
$$(u,\ y)\longmapsto u(y)$$

の合成写像であり，$h'(x)x_2=\psi\circ\varphi(x)$ と表せる。そして

$$\varphi'(a)x_1=(g''(b)\circ f'(a)x_1,\ f''(a)(x_1,\ x_2))$$

であり（命題2. 7. 1参照），ψ は連続双線形写像であるから，定理 2. 2. 2 を用いて

$$h''(a)(x_1,\ x_2)=\psi'(\varphi(a))\circ\varphi'(a)(x_1,\ x_2)$$
$$=\psi'(\varphi(a))(g''(b)\circ f'(a)x_1,\ f''(a)(x_1,\ x_2))$$
$$=\psi(g''(b)\circ f(a)x_1,\ f'(a)x_2)+\psi(g'(b),\ f''(a)(x_1,\ x_2))$$

が得られる。$(f''(a)h)k-(f''(a)k)h$ は双線形写像であるから，補題により零写像である。そこで，以下では（2. 7. 6）を証明する。

$$|A(h,\ k)-(f''(a)k)h|$$
$$\leqslant |A(h,\ k)-f'(a+k)h+f'(a)h|$$
$$+|f'(a+k)h-f'(a)h-(f''(a)k)h|$$

として二つの項がともに $o((|h|+|k|)^2)$ に等しいことを証明しよう。

$$|f'(a+k)h-f'(a)h-(f''(a)k)h|$$
$$\leqslant \|f'(a+k)-f'(a)-f''(a)k\|\,|h|,$$
$$\|f'(a+k)-f'(a)-f''(a)k\|=o(|k|)$$

であるから，

$$\|f'(a+k)-f'(a)-f''(a)k\|=o(|h|+|k|)$$

が成り立ち，$|h|\leqslant|h|+|k|$ に注意すれば，

$$(2.\ 7.\ 7)\quad |f(a+k)h-f'(a)h-(f''(a)k)h|=o((|h|+|k|)^2)$$

が成り立つことがわかる。したがって，あとは

$$(2.\ 7.\ 8)\quad |A(h,\ k)-f'(a+k)h+f'(a)h|=o((|h|+|k|)^2)$$

を証明すればよい。

$$B(h)=f(a+h+k)-f(a+h)-f'(a+k)h+f'(a)h$$

とおくと

$$B(h)-B(0)=A(h,\ k)-f'(a+k)h+f'(a)h$$

であるから，有限増分定理により

$$(2.\ 7.\ 9)\quad |A(h,\ k)-f'(a+k)h+f'(a)h|\leqslant|h|\sup_{0<t<1}\|B'(ht)\|$$

を得る。さらに

$$f'(a+ht+k)=f'(a)+f''(a)(ht+k)+|ht+k|\alpha(ht+k),$$
$$f'(a+ht)=f'(a)+f''(a)(ht)+|ht|\beta(ht),$$
$$f'(a+k)=f'(a)+f''(a)k+|k|\gamma(k)$$

とおくと，$|h|+|k|\to 0$ のとき $\alpha(ht+k)$，$\beta(ht)$，$\gamma(k)$ はいずれも $\bar{0}$ に収束する。そして

を満たすとき，φは零写像である。

〔証明〕 φの双線形性により，$h=\bar{0}$ または $k=\bar{0}$ であるとき $\varphi(h, k)=\bar{0}$ であるから，以下では $h\neq\bar{0}$, $k\neq\bar{0}$ と仮定して $\varphi(h, k)=\bar{0}$ を証明する。

$$|\varphi(h, k)|=(|h|+|k|)^2\alpha(h, k)$$

によって $\alpha(h, k)$ を定義すると

$$\lim_{(h, k)\to(\bar{0}, \bar{0})}\alpha(h, k)=0 \tag{2.7.4}$$

である。$t\neq 0$ を任意の実数とすると

$$|\varphi(ht, kt)|=(|ht|+|kt|)^2\alpha(ht, kt)$$

であり，両辺を t^2 で割って

$$|\varphi(h, k)|=(|h|+|k|)^2\alpha(ht, kt)$$

を得る。ここで $t\to 0$ なる場合を考えれば，(2.7.4) により $|\varphi(h, k)|=0$ でなければならない。▯

定理 2. 7. 3 写像 $f\colon U\to F$ が点 $a\in U$ において 2 回微分可能ならば $f''(a)\in \boldsymbol{L}(E, E; F)$ は対称な双線形写像である。すなわち，任意の h, $k\in E$ に対して

$$(f''(a)h)k=(f''(a)k)h \tag{2.7.5}$$

が成り立つ。

〔証明〕

$$A(h, k)=f(a+h+k)-f(a+h)-f(a+k)+f(a)$$

とおくと，明らかに $A(h, k)=A(k, h)$，すなわちAは h, k に関して対称である。したがって，

$$|A(h, k)-(f''(a)k)h|=o((|h|+|k|)^2),\quad |h|+|k|\to 0 \tag{2.7.6}$$

が証明できたとすれば

$$\begin{aligned}&|(f''(a)h)k-(f''(a)k)h|\\ &\leqslant|(f''(a)h)k-A(k, h)|\\ &+|(f''(a)k)h-A(h, k)|=o((|h|+|k|)^2),\quad |h|+|k|\to 0\end{aligned}$$

は変らない。(2. 7. 2) は，$h,\ k\in E$ に対して $f''(a)h\in \boldsymbol{L}(E;\ F)$，$(f''(a)h)k\in F$ であることを示す。以下では，$(f''(a)h)k$ を $f''(a)(h,\ k)$ とも記す。

定義 2. 7. 2 写像 $f: U\to F$ が U の各点で2回微分可能であるとき，f は **U において2回微分可能**，あるいは単に f は**2回微分可能**であるという。このとき，写像

$$(2.7.3)\quad f'': U\to \boldsymbol{L}(E,\ E;\ F)$$
$$x\longmapsto f''(x)$$

を f の**2階導写像**という。さらに，f'' が U において連続であるとき，f は **U において C^2 級**である，あるいは **C^2 写像**であるという。これは，写像 f' が U において C^1 級であることと同等である。

命題 2. 7. 1 $f: U\to F$ を点 $a\in U$ で2回微分可能な写像とし，$k\in E$ に対して

$$g(x)=f'(x)k,\quad x\in U$$

とおくと，$g: U\to F$ は点 a で微分可能で，$h\in E$ に対し

$$g'(a)h=(f''(a)h)k$$

である。

〔**証明**〕 g は二つの写像

$$f': U\to \boldsymbol{L}(E;\ F)$$

および

$$\varphi: \boldsymbol{L}(E;\ F)\to F$$
$$u\longmapsto u(k)$$

の合成写像であり，ここで φ は連続線形写像である。したがって

$$g'(a)h=(\varphi\circ f')'(a)h=\varphi\circ f''(a)h=(f''(a)h)k。\ \square$$

補題 2. 7. 2 双線形写像 $\varphi: E\times E\to F$ が

$$|\varphi(h,\ k)|=o((|h|+|k|)^2),\quad (h,\ k)\in E\times E$$

が成り立つ。

〔**証明**〕 定理により，(f_n) がUの各点で点別収束することを証明すればよい。そこで，Vを点列 $(f_n(x))$ が収束するような $x\in U$ の集合として，$V=U$を証明しよう。 $a\in V$ よりVは空集合ではないので，Uの連結性によりあとはVが開かつ閉であることを示せばよい。$b\in V$ とすると(ii)により (f_n') はある開球 $B(b,\ r)=\{x\in E:\ |x-b|<r\}\subset U$ で一様収束するから，定理により $B(b,\ r)\subset V$ が成り立ち，したがってVは開集合である。つぎに，bを閉包$\bar{V}$の点，$B(b,\ r)$ を (f_n') がここで一様収束するような開球とすると，$V\cap B(b,\ r)$ は空でないから定理により $b\in V$ を得る。したがって，Vは閉集合でもあることがわかった。 □

§7 2回微分

この§では，E, F を Banach 空間，U を E の開部分集合とする。

7. 1 定義と基本的性質

f: $U\to F$ を U の各点で微分可能な写像とすると，fの導写像

(2. 7. 1) f': $U\to \boldsymbol{L}(E;\ F)$

についても，$\boldsymbol{L}(E;\ F)$ が Banach 空間であることから，その微分可能性が問題になる。

定義 2. 7. 1 写像f' が点 $a\in U$ で微分可能であるとき，fは点aで**2回微分可能**であるという。そして，この微分をfの点aにおける**2回微分**といい，記号 $f''(a)$，$D^2f(a)$ などで表す。

$f''(a)$ は写像 (2. 7. 1) の微分であるから

(2. 7. 2) $f''(a)\in \boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(E;\ F))$

であり，また (1. 7. 7) (I, p.18) により

$$\boldsymbol{L}(E;\ \boldsymbol{L}(E;\ F))\approx \boldsymbol{L}(E,\ E;\ F)$$

であるから，$f''(a)$ を $\boldsymbol{L}(E,\ E;\ F)$ の元と見なしても $f''(a)$ のノルム

$$\begin{aligned}&|f_{n+k}(x+h)-f_{n+k}(x)-f'_{n+k}(x)h|\\&\leqslant|(f_{n+k}(x+h)-f_n(x+h))-(f_{n+k}(x)-f_n(x))|\\&\quad+|f'_{n+k}(x)h-f'_n(x)h|+|f_n(x+h)-f_n(x)-f'_n(x)h|\end{aligned}$$

が一般に成り立つが，ここで $\varepsilon>0$ を任意にとる。十分大きいnを一つとって固定すると，(2. 6. 5) と同様に

$$|(f_{n+k}(x+h)-f_n(x+h))-(f_{n+k}(x)-f_n(x))|\leqslant|h|\varepsilon,$$

また，(f'_n) の一様収束性により

$$|f'_{n+k}(x)h-f'_n(x)h|\leqslant\|f'_{n+k}(x)-f'_n(x)\|\,|h|\leqslant|h|\varepsilon$$

が得られ，さらにこのnに対して $\alpha>0$ を適当に定めれば，f_n の微分可能性から

$$|f_n(x+h)-f_n(x)-f'_n(x)h|\leqslant|h|\varepsilon,\quad |h|\leqslant\alpha$$

を得る。以上から，任意の整数 $k\geqslant0$ に対し

$$|f_{n+k}(x+h)-f_{n+k}(x)-f'_{n+k}(x)h|\leqslant3|h|\varepsilon,\quad |h|\leqslant\alpha$$

を得，したがって

$$|f(x+h)-f(x)-g(x)h|\leqslant3|h|\varepsilon,\quad |h|\leqslant\alpha$$

でなければならない。すなわち，(2. 6. 6) が得られた。▯

系 Uを連結な開集合とし

$$f_n:U\to F,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を以下の性質をもつ微分可能な写像の列とする：

(i) 写像列 (f_n) はある点 $a\in U$ で収束する；

(ii) 写像列 $f'_n:U\to\boldsymbol{L}(E;F)$ は，Uの各点で点別収束し，局所的に一様収束する（すなわち，Uの各点でその点を中心とする適当な開球をとると，(f'_n) はその開球で一様収束する）。

このとき，(f_n) はある微分可能な写像fに点別収束し，かつその収束は局所的に一様である。また，各点 $x\in U$ で

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

に含まれる。したがって，上と同様に $f(b)=f(x)=f(a)$，すなわち $b\in V$ を得て，V が閉集合であることがわかる。□

6.3 写像列の項別微分

定理 2.6.3 Uを開球 $\{x\in E: |x-c|<r\}$ $(c\in E,\ r>0)$ とし

$$f_n: U\to F,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を以下の性質をもつ微分可能な写像の列とする：

(i) 写像列 (f_n) はある点 $a\in U$ で収束する；

(ii) 写像列 $f'_n: U\to \boldsymbol{L}(E;\ F)$ は一様収束する。

このとき，(f_n) はある微分可能な写像 $f: U\to F$ に一様収束し，各 $x\in U$ に対して

$$(2.6.4)\quad f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

が成り立つ。

〔**証明**〕 写像列 (f'_n) の一様収束性は，任意の整数 $k\geqslant 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in U}\|f'_{n+k}(y)-f'_n(y)\|=0$$

と書けることに注意する。有限増分定理を用いると，任意の $x\in U$ に対して

$$\begin{aligned}(2.6.5)\quad & |f_{n+k}(x)-f_n(x)|-|f_{n+k}(a)-f_n(a)| \\ & \leqslant |(f_{n+k}(x)-f_n(x))-(f_{n+k}(a)-f_n(a))| \\ & \leqslant |x-a|\sup_{0<t<1}\|f'_{n+k}(a+(x-a)t)-f'_n(a+(x-a)t)\| \\ & \leqslant 2r.\sup_{y\in U}\|f'_{n+k}(y)-f'_n(y)\|\end{aligned}$$

を得るから，点列 $(f_n(x))$ は F の完備性から収束し，さらに f を $x\mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定義される写像とすれば，(f_n) は f に一様収束することがわかる。

(2.6.4) を証明するためには，写像 $g: U\to \boldsymbol{L}(E;\ F)$ を $g(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ により定義し

$$(2.6.6)\quad |f(x+h)-f(x)-g(x)h|=o(|h|)$$

を示せばよい。

ことがわかる。以上でfのUにおける微分可能性が示されたが，さらに(2.4.12)により導写像 $x\mapsto f'(x)$ はUで連続であることがわかる。□

註 (2.6.3)の右辺の最終項については，——点aの近傍における第n偏微分 $(\partial f/\partial x_n)(x)$ の存在および写像$x\mapsto(\partial f/\partial x_n)(x)$ の連続性——を仮定しなくても，——点aにおける第n偏微分可能性——だけから

$$|f(a+e_nh_n)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n|=o(|h|)$$

が導かれる。したがって，fの点aにおける微分可能性は，点aの近傍における1からnまでのいずれか $n-1$ 個の指標iについての写像 $x\mapsto(\partial f/\partial x_i)(x)$ の存在と連続性，および残る一つの指標i_0についての点aにおける第i_0偏微分 $(\partial f/\partial x_{i_0})(a)$ の存在だけから導くことができる。

6. 2 $f'(x)\equiv\bar{0}$ なる写像 f

位相空間Aについて，Aに真に含まれ，空でない開かつ閉である集合が存在しないとき，Aは**連結**であるという。

定理 2. 6. 2 Uが連結な開集合であるとき，写像 f: $U\to F$ についてUの各点xで $f'(x)=\bar{0}$ (零写像) ならばfはUにおいて定値である。

〔**証明**〕 aをUの任意の点とし，$f(x)=f(a)$ であるような点 $x\in U$ の集合をVとする。$a\in V$ であるからVは空でないので，Vが開かつ閉であることを証明すればよい。このとき，連結性の定義により $V=U$ となる。まず，Vが開集合であることを示す。bをVの任意の点とすると，bは開集合Uの点であるから，Uはある開球 $B(b, r)=\{x\in E: |x-b|<r\}$ $(r>0)$ を含む。xを $B(b, r)$ の任意の点とすると，xとbを結ぶ線分は $B(b, r)$ に含まれるから，有限増分定理により

$$|f(x)-f(b)|\leqslant \sup_{0<t<1}\|f'(b+(x-b)t)\||x-b|=0$$

が成り立ち，$f(x)=f(b)=f(a)$ すなわち $x\in V$ を得る。ゆえに，$B(b, r)\subset V$ であり，Vは開集合であることがわかる。つぎに，Vは閉集合であることを示す。bを閉包$\bar{V}$の点とする。bを中心とする開球 $B(b, r)$ をU内にとると，$V\cap B(b, r)$ の点xが存在し，bとxを結ぶ線分は $B(b, r)$

$$+|f(a+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-f(a+\sum_{i=3}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2|$$

$$+\cdots$$

$$+|f(a+e_nh_n)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n|$$

が成り立つ。ここで，写像

$$\varphi(k)=f(a+e_1k+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)k$$

を考えると

$$\varphi(h_1)-\varphi(0)=f(a+\sum_{i=1}^{n}e_ih_i)-f(a+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1,$$

$$\varphi'(k)=f'(a+e_1k+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)e_1-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+e_1k+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

である。そこで，有限増分定理を $\varphi(k)$ に適用すると

$$|f(a+\sum_{i=1}^{n}e_ih_i)-f(a+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1|$$

$$\leqslant|h_1|\sup_{0<t<1}\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+e_1h_1t+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\|$$

を得る。写像$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$: $U\to\boldsymbol{L}(E_1;F)$ の点 a における連続性により

$$\lim_{h\to\bar{0}}\sup_{0<t<1}\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+e_1h_1t+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\|=0$$

であり，$|h_1|\leqslant|h|$ であるから

$$|f(a+\sum_{i=1}^{n}e_ih_i)-f(a+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1|=o(|h|)$$

が成り立つ。

同様にして，各 $2\leqslant j\leqslant n$ についても

$$|f(a+\sum_{i=j}^{n}e_ih_i)-f(a+\sum_{i=j+1}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j|=o(|h|)$$

が得られ（ただし，ここでは$\sum_{i=n+1}^{n}e_ih_i=\bar{0}$），関係式（2. 6. 2）が成り立つ

§6　有限増分定理の応用

この§では E, F を Banach 空間，UをEの開部分集合とする。

6. 1　定理 2. 4. 2 の逆について

Eが閉部分空間 E_1, …, E_n の直積 Banach 空間となっている場合，写像 f: $U\to F$ の点 $a\in U$ における各偏微分 $(\partial f/\partial x_i)(a)$, $(1\leqslant i\leqslant n)$ の存在だけからでは，一般にはfの点aにおける微分可能性を主張できない。すなわち，定理2. 4. 2の逆は一般には成り立たない。しかし，つぎの定理から，——各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して，点 a のある近傍の各点xで第 i 偏微分 $(\partial f/\partial x_i)(x)$ が存在し，かつ写像 $x\mapsto(\partial f/\partial x_i)(x)$ が点aで連続——という条件は，fが点aで微分可能であるための一つの十分条件であることがわかる。

定理 2. 6. 1　Eは閉部分空間 E_1, …, E_n の直積 Banach 空間であるとする。Uの各点で，写像 f: $U\to F$ の各偏微分 $(\partial f/\partial x_i)(x)$, $(1\leqslant i\leqslant n)$ が存在し，かつ各写像

$$(2.\ 6.\ 1)\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}:\ U\to \boldsymbol{L}(E_i;\ F),\ 1\leqslant i\leqslant n$$

が連続であることは，写像fが C^1 級であることと同等である。

〔**証明**〕 (2.4.10) から明らかに，fがC^1級ならば前半の条件が成り立つ。以下では，逆の証明をする。はじめに，aをUの任意の点とし，fが点aで微分可能であることを証明するが，それには

$$(2.\ 6.\ 2)\quad |f(a+h)-f(a)-(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i)h|=o(|h|),\ h\in E$$

を証明しよう。各 $1\leqslant i\leqslant n$ に対して，hの E_i 成分を h_i と記し，e_i: $E_i\to E$ を標準単射とすると，$h=\sum_{i=1}^{n}e_ih_i$ と書け

$$(2.\ 6.\ 3)\quad |f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i|$$

$$\leqslant|f(a+\sum_{i=1}^{n}e_ih_i)-f(a+\sum_{i=2}^{n}e_ih_i)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1|$$

が成り立つ。

〔**証明**〕 $f(a+h)-f(a)=\bar{0}$ のとき定理は明らかに成り立つ。そこで以下では $f(a+h)-f(a)\neq\bar{0}$ を仮定して定理を証明する。Hahn-Banach の定理の系 (I, p.7) によりその存在が保証される

$$(2.5.2)\quad \begin{cases}\varphi(f(a+h)-f(a))=|f(a+h)-f(a)|,\\ \|\varphi\|=1\end{cases}$$

であるような線形汎関数 $\varphi\in\boldsymbol{L}(F;\mathbf{R})$ を用いて，実数値関数

$$g(t)=\varphi\circ f(a+ht),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

を考える。

$$g'(t)=\varphi\circ f'(a+ht)h$$

であるから，一変数実数値関数の平均値の定理により，ある $0<t_0<1$ に対して

$$g(1)-g(0)=\varphi\circ f'(a+ht_0)h$$

を得るが，(2. 5. 2) を用いると

$$(2.5.3)\quad |f(a+h)-f(a)|\leqslant\|f'(a+ht_0)\||h|$$

が成り立つことがわかる。これから直ちに (2. 5. 1) を得る。□

註 Fが Euclid 空間の場合，この定理は Hahn-Banach の定理を用いずに証明できる。

実際，$f(a+h)-f(a)\neq\bar{0}$ として

$$e=(f(a+h)-f(a))/|f(a+h)-f(a)|,$$

$$g(t)=\langle f(a+ht),\ e\rangle,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

とおけば，$g(1)-g(0)=\langle f(a+h)-f(a),\ e\rangle=g'(t_0)=\langle f'(a+ht_0)h,\ e\rangle$ $(0<t_0<1)$ に内積についての Schwarz の不等式を適用して (2. 5. 3) を得る。この証明法は，F. and R. Nevanlinna〔5〕，R. Abraham and J. E. Marsden〔2〕に述べられている。なお，H. Cartan〔3〕，S. Lang〔4〕では，有限増分定理は F が一般の Banach 空間の場合について，それぞれの別の方法により証明されている。

$$f'(a)e_i = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\1\leqslant k\leqslant n}} \bar{e}_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)dx_j(e_i)$$

$$= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{e}_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a),\ 1\leqslant i\leqslant n$$

を得る。したがって，$f'(a)$ は標準基底 (e_i)，$(\bar{e}_k)$ に関してつぎの行列で表される：

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)\cdots\dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a)\cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}。$$

これは，写像 f の点 a における **Jacobi 行列**と称されている。

話を一般の Banach 空間にもどし，さらに直和 Banach 空間 $G=\bigoplus_{k=1}^{l} G_k$，$F$ の開部分集合 V，点 $b=f(a)$ で微分可能な写像 g: $V\to G$ が与えられ，$f(U)\subset V$ が成り立つ場合を考える。G から G_k への射影を $q_k(1\leqslant k\leqslant l)$ で，G_k から G への標準単射を $\hat{e}_k$ で表せば，$g_k=q_k\circ g$ とおいて(2.4.13)を用い

$$g'(b) = \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant l}} \hat{e}_k\circ\frac{\partial g_k}{\partial y_h}(b)dy_h$$

を得る。$dy_h\circ\bar{e}_j=F_j$ の恒等写像 ($h=j$ のとき)，$=$零写像 ($h\neq j$ のとき) に注意すると，連鎖律 $(g\circ f)'(a)=g'(b)\circ f'(a)$ を用いて

(2.4.14) $$\frac{\partial(g_k\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\circ\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a),\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant l$$

を得る。

§5　有限増分定理

この§では E, F は Banach 空間，U は E の開部分集合とする。

定理 2. 5. 1（有限増分定理） f: $U\to F$ は U で微分可能な写像とする。U の二点 a, $a+h$ を結ぶ線分 $a+ht(0\leqslant t\leqslant 1)$ が U に含まれるとき

(2. 5. 1) $$|f(a+h)-f(a)|\leqslant|h|\sup_{0<t<1}\|f'(a+ht)\|$$

定理 2. 4. 2 写像 $f: U \to F$ が点 $a \in U$ で微分可能ならば，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ について f は点 a で第 i 偏微分可能であり

$$(2.4.10) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a) \circ e_i,$$

$$(2.4.11) \quad f'(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i$$

が成り立つ。ここで，p_i は E から E_i への射影である。

〔**証明**〕(2.4.10) は (2. 4. 8) の両辺の写像の $\bar{0}_i$ における微分を考えれば明らかである。

つぎに，$\sum_{i=1}^{m} e_i \circ p_i$ は E の恒等写像であるから

$$f'(a) = f'(a) \circ \sum_{i=1}^{m} e_i \circ p_i = \sum_{i=1}^{m} (f'(a) \circ e_i) \circ p_i$$

が成り立つ。ここで，(2.4.10) を用いて (2.4.11) を得る。□

註 2 (2.4.11) における p_i を dx_i と書く習慣がある。これに従えば (2.4.11) は

$$(2.4.12) \quad f'(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

と書かれる。

4. 3　4. 1，4. 2 が同時に成り立つ場合

(2.4.12) において，f を f_k で置き換えて

$$f_k'(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) dx_i$$

を得る。これと (2. 4. 4) とを合せると

$$(2.4.13) \quad f'(a) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \bar{e}_k \circ \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) dx_j$$

を得る。

とくに，$E = \mathbf{R}^m$，$F = \mathbf{R}^n$ の場合，$\mathbf{R}^m$，$\mathbf{R}^n$ の標準基底をそれぞれ (e_i) $(1 \leqslant i \leqslant m)$，$(\bar{e}_k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ とすると

が成り立つ。このとき$\sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k \circ p_k$ はFの恒等写像であるから

$$f'(a) = (\sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k \circ p_k) \circ f'(a) = \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k \circ f'_k(a)$$

を得る。

逆に，各 f_k が点 a で微分可能であるとすると，(2. 4. 3) から f も点 a で微分可能である。□

註 1　n 個の Banach 空間 $F_1, \cdots, F_n$ が与えられて，F がそれらの積 Banach 空間 $F_1 \times \cdots \times F_n$ であるとき

(2. 4. 6)　$f_k = \pi_k \circ f, \ 1 \leqslant k \leqslant n$

とおけば（π_k は（1. 5. 3）で定義された射影 $F \to F_k$），(2. 4. 4) は

(2. 4. 7)　$f'(a) = (f'_1(a), \ \cdots, \ f'_n(a))$

と書ける。

4. 2　E が閉部分空間 $E_1, \cdots, E_m$ の直和 Banach 空間である場合

定義　$a \in U, \ 1 \leqslant i \leqslant m$ とし写像

(2. 4. 8)　$\varphi_i(x_i) = f(a + e_i(x_i))$

を考える。ここで，x_i は E_i の原点 $\bar{0}_i$ の近傍の点，e_i: $E_i \to E$ は標準単射とする。φ_i が E_i の原点で微分可能であるとき，f は点 a で**第 i 偏微分可能**であるという。また，$\varphi'_i(0_i)$ を f の点 a における**第 i 偏微分**といい，記号$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$，$f_{x_i}(a)$，$D_i f(a)$ 等で表す。φ_i が E_i の原点の近傍から F への写像であるから

(2. 4. 9)　$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \boldsymbol{L}(E_i; F)$

である。

f が U の各点で第 i 偏微分可能であるとき，f は **U において第 i 偏微分可能**，あるいは単に**第 i 偏微分可能**であるという。また，このとき写像

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \boldsymbol{L}(E_i; F)$$

を**第 i 偏導写像**という。

が成り立ち，同様に

$$f'(a)\circ(f^{-1})'(b)=I_F \quad (F\text{の恒等写像})$$

が成り立つ。この二つの等式から（2. 3. 2）を得る。□

§4 直和 Banach 空間における微分

$E,\ F$ を Banach 空間，UをEの開部分集合，そして

(2. 4. 1)　$f\colon U\to F$

を写像とする。

4. 1 Fが閉部分空間 $F_1,\ \cdots,\ F_n$ の直和 Banach 空間である場合

$F=\bigoplus_{j=1}^{n} F_j$ から F_k への射影 $p_k\colon\sum_{j=1}^{n} y_j\mapsto y_k$ を用いて

(2. 4. 2)　$f_k=p_k\circ f\ (1\leqslant k\leqslant n)$

とおく。定理 1. 5. 2 (I, p. 14) により，各 p_k は連続な線形写像である。また，F_k からFへの標準単射を $\bar{e}_k$ とすると

(2. 4. 3)　$f=\sum_{k=1}^{n}\bar{e}_k\circ f_k$

が成り立つ。

定理 2. 4. 1　各写像 $f_k\colon U\to F_k(1\leqslant k\leqslant n)$ が点 $a\in U$ で微分可能であることは，写像 $f\colon U\to F$ が点aで微分可能であるための必要十分条件である。

このとき

(2. 4. 4)　$f'(a)=\sum_{k=1}^{n}\bar{e}_k\circ f'_k(a)$

が成り立つ。

〔証明〕　f が点 a で微分可能であるとする。各 $1\leqslant k\leqslant n$ について，射影 p_k は連続線形写像であるから微分可能で，$p'_k(f(a))=p_k$ であり（命題 2. 2. 1, (ii)），連鎖律によって $f_k=p_k\circ f$ も点aで微分可能で

(2. 4. 5)　$f'_k(a)=p_k\circ f'(a)\ \ (1\leqslant k\leqslant n)$

分可能とする。このとき，合成写像 $h=g\circ f\colon U\to G$ は点 a で微分可能であり

(2. 3. 1)　$h'(a)=g'(b)\circ f'(a)\,(=g'(f(a))\circ f'(a))$

が成り立つ。

〔**証明**〕 $H(x)=h(x)-h(a)-g'(b)\circ f'(a)(x-a)$ とおくとき，$|H(x)|=o(|x-a|)$，$x\to a$ を証明すればよい。

$$\alpha(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a),$$

$$\beta(y)=\begin{cases}(g(y)-g(b)-g'(b)(y-b))/|y-b|, & y\neq b\\ \bar{0}, & y=b\end{cases}$$

とおき，$y=f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}H(x)&=g(y)-g(b)-g'(b)(y-b)+g'(b)(y-b-f'(a)(x-a))\\&=|y-b|\beta(y)+g'(b)\alpha(x)\\&=|f'(a)(x-a)+\alpha(x)|\beta(y)+g'(b)\alpha(x),\end{aligned}$$

したがって

$$|H(x)|\leqslant\|f'(a)\|\,|x-a|\,|\beta(y)|+(|\beta(y)|+\|g'(b)\|)\,|\alpha(x)|$$

を得る。ここで，$|\alpha(x)|=o(|x-a|)$，$x\to a$ であり，また f の点 a における連続性から $|x-a|\to 0$ のとき，$|y-b|\to 0$，したがって $|x-a|\to 0$ のとき $|\beta(y)|\to 0$ である（g の点 b における微分可能性)。ゆえに $|H(x)|=o(|x-a|)$，$x\to a$ を得る。□

系　全単射 $f\colon U\to V$ について，f が点 $a\in U$ で，また $f^{-1}\colon V\to U$ が点 $b=f(a)\in V$ で微分可能ならば

(2. 3. 2)　$(f^{-1})'(b)=(f'(a))^{-1}$

が成り立つ。

〔**証明**〕 $f^{-1}\circ f$ は E の恒等写像 I_E の U 上への制限であるから，命題 2. 2. 1，(ii)により

$$(f^{-1}\circ f)'(a)=(f^{-1})'(b)\circ f'(a)=I_E$$

近くとれば， Isom (E, F) は開集合であるから（定理 1. 4. 2, (a); I, p. 11) $f+h\in\mathrm{Isom}(E; F)$ であり，また $\|f^{-1}\circ h\|\leqslant\|f^{-1}\|\|h\|<1$ を仮定してよい。したがって， $(I+f^{-1}\circ h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-f^{-1}\circ h)^n$ （I は E の恒等写像）である（定理 1. 4. 1, I, p. 10)。

そこで

$$
\begin{aligned}
&\Phi(f+h)-\Phi(f)+f^{-1}\circ h\circ f^{-1}\\
&=(f+h)^{-1}-f^{-1}+f^{-1}\circ h\circ f^{-1}\\
&=((I+f^{-1}\circ h)^{-1}-I+f^{-1}\circ h)\circ f^{-1}\\
&=((-f^{-1}\circ h)^2\sum_{n=0}^{\infty}(-f^{-1}\circ h)^n)\circ f^{-1}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(f+h)-\Phi(f)+f^{-1}\circ h\circ f^{-1}\|\\
&\leqslant\|f^{-1}\|^3\|h\|^2\sum_{n=0}^{\infty}(\|f^{-1}\|\|h\|)^n\\
&=\|f^{-1}\|^3\|h\|^2/(1-\|f^{-1}\|\|h\|)=o(\|h\|)
\end{aligned}
$$

を得る。ゆえに（2. 2. 3）が成り立つ。

つぎに，Φ' の連続性を証明する。写像 φ: $\boldsymbol{L}(F; E)\times\boldsymbol{L}(F; E)\longrightarrow\boldsymbol{L}(\boldsymbol{L}(E; F); \boldsymbol{L}(F; E))$ を

$$\varphi(u, v)h=-u\circ h\circ v, \quad h\in\boldsymbol{L}(E; F)$$

により定義すると，φ は双線形で，$\|\varphi(u, v)h\|\leqslant\|u\|\|h\|\|v\|$ であるから φ は連続である。そして，$\Phi'(f)h=\varphi(f^{-1}, f^{-1})h$ であるから，Φ' は，連続写像 $f\mapsto(f^{-1}, f^{-1})=(\Phi(f), \Phi(f))$ と φ との合成写像と見なすことができ，したがって連続である。□

§3　合成写像の微分（連鎖律）

この§では E, F, G を Banach 空間，U, V をそれぞれ E, F の開部分集合とする。

定理 2. 3. 1（連鎖律——Chain Rule） 写像 f: $U\to F$ は $f(U)\subset V$ を満たし，点 $a\in U$ で微分可能，また写像 g: $V\to G$ は点 $b=f(a)$ で微

$\in \boldsymbol{L}(E_1\times E_2;\ F)$ の点 $(h_1,\ h_2)$ における値を表す。

〔**証明**〕 積ノルム空間のノルムについては，第１章§5 を参照。はじめに，$(h_1,\ h_2)\mapsto f(h_1,\ a_2)+f(a_1,\ h_2)$ は $E_1\times E_2$ から F への連続な線形写像であることに注意する。

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,\ a_2+h_2)-f(a_1,\ a_2)-(f(h_1,\ a_2)+f(a_1,\ h_2))\\&=f(h_1,\ h_2)\end{aligned}$$

が成り立ち

$$\begin{aligned}&|f(h_1,\ h_2)|\leqslant\|f\||h_1||h_2|\leqslant\|f\|(|h_1|+|h_2|)^2\\&=\|f\||(h_1,\ h_2)|^2=o(|(h_1,\ h_2)|)\end{aligned}$$

である。□

註 $E_1,\ \cdots,\ E_n$ を n 個の Banach 空間とし，連続な多重線形写像 f: $E_1\times\cdots\times E_n\to F$ を考えると，上の定理の証明とほぼ同様にして，f は微分可能であり，点 $(a_1,\ \cdots,\ a_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ における微分は

$$\begin{aligned}(2.\ 2.\ 2)\quad &f'(a_1,\ \cdots,\ a_n)(h_1,\ \cdots,\ h_n)\\&=f(h_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)+f(a_1,\ h_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n)+\cdots\\&\quad+f(a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ h_n)\end{aligned}$$

で与えられることがわかる。

つぎに，E, F を Banach 空間とし定理 1. 4. 2 (I, p. 11) で取り上げた写像

$$\begin{aligned}\Phi:\ &\mathrm{Isom}(E;\ F)\to\boldsymbol{L}(F;\ E)\\&\quad f\longmapsto f^{-1}\end{aligned}$$

の微分を考える。

定理 2. 2. 3 写像 Φ は，$\boldsymbol{L}(E;\ F)$ の開集合 $\mathrm{Isom}(E;\ F)$ において C^1 級であり，点 $f\in\mathrm{Isom}(E;\ F)$ における微分は

$$(2.\ 2.\ 3)\quad \Phi'(f)h=-f^{-1}\circ h\circ f^{-1},\ h\in\boldsymbol{L}(E;\ F)$$

で与えられる。

〔**証明**〕 はじめに，(2. 2. 3)を証明する。$h\in\boldsymbol{L}(E;\ F)$ を零写像に十分

で連続である。

〔**証明**〕 不等式

$$|f(a+h)-f(a)|\leqslant|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|+|f'(a)h|$$

から明らかである。□

命題 2. 1. 3 二つの写像 $f\colon U\to F$, $g\colon U\to F$ がともに点 a で微分可能であるとすると以下が成り立つ：

(i) 任意の実数 α に対して，写像 $\alpha f\colon U\to F$ は点 a で微分可能で

$$(\alpha f)'(a)=\alpha f'(a)\,;$$

(ii) 写像 $f+g\colon U\to F$ は点 a で微分可能で

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)。$$

〔**証明**〕 微分の定義から自明である。□

§2 特別な写像の微分

命題 2. 2. 1 E, F を Banach 空間，U を E の開部分集合とする。

(i) $f\colon U\to F$ が定値写像ならば，f は各点 $x\in U$ で微分可能で，$f'(x)=\bar{0}$（零写像）である。

(ii) $f\colon U\to F$ が E から F への連続線形写像の U 上への制限であるならば，f は各点 $x\in U$ で微分可能で

$$f'(x)=f$$

である。

〔**証明**〕 微分の定義から明らかである。□

定理 2. 2. 2 E_1, E_2, F を Banach 空間とする。$f\colon E_1\times E_2\to F$ が連続な双線形写像ならば，f は微分可能であって，点 $(a_1,\ a_2)\in E_1\times E_2$ における微分は

(2. 2. 1) $f'(a_1,\ a_2)(h_1,\ h_2)=f(h_1,\ a_2)+f(a_1,\ h_2)$

で与えられる。ここで，$h_1\in E_1$, $h_2\in E_2$ であり，左辺は写像 $f'(a_1,\ a_2)$

$$\alpha(x)=o(|x|)$$

と書く。さらに一般に，非負値関数 $\theta\colon E\to\mathbf{R}_+$ について

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha(x)}{\theta(x)} \xrightarrow{x\to a,\ \theta(x)\neq 0} 0, \\ \theta(x)=0 \text{ のとき } \alpha(x)=0 \end{cases}$$

を満たすとき

$$\alpha(x)=o(\theta(x)),\quad x\to a$$

と書く。

f, g が点 $a\in E$ の近傍で定義された F の値をとる写像で，整数 $m>0$ に対して $|f(x)-g(x)|=o(|x-a|^m)$, $x\to a$ が成り立つとき，f, g は点 a で m 次の接触をするということがある。

omicron 記号と微分記号 $f'(a)$ を用いて (2. 1. 1) を書けば

(2. 1. 3) $\quad |f(a+h)-f(a)-f'(a)h|=o(|h|),\ h\in E$

となる。

命題 2. 1. 1 写像 $f\colon U\to F$ が点 a で微分可能ならば，その点 a における微分は一意的に定まる。

〔**証明**〕 φ, $\psi\in \boldsymbol{L}(E;F)$ をともに f の点 a における微分とするとき，$\forall h\in E\ \varphi(h)=\psi(h)$ を示せばよい。$h=\bar{0}$ であるとき，$\varphi(h)=\psi(h)=\bar{0}$ であるから，以下では $h\neq\bar{0}$ を仮定する。t を実数 $\neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} &|\varphi(h)-\psi(h)|=|\varphi(ht)-\psi(ht)|/|t| \\ &\leqslant (|f(a+ht)-f(a)-\varphi(ht)|/|ht| \\ &+|f(a+ht)-f(a)-\psi(ht)|/|ht|)\,|h| \end{aligned}$$

が成り立つが，ここで $t\to 0$ とすることにより，微分の定義から $|\varphi(h)-\psi(h)|=0$ であることがわかる。□

命題 2. 1. 2 写像 $f\colon U\to F$ が点 $a\in U$ で微分可能ならば，f は点 a

Banach 空間における微分（Ⅱ）

関　本　年　彦

第2章　Banach 空間における微分

§1　微分の定義

この§では E, F を Banach 空間，U を E の開部分集合とする。

定義 2. 1. 1　写像 $f\colon U\to F$ が点 $a\in U$ で微分可能であるとは

$$(2.\ 1.\ 1)\quad \frac{|f(a+h)-f(a)-\varphi(h)|}{|h|}\xrightarrow[]{\substack{|h|\neq 0\\ |h|\to 0}}0,\ \ h\in E$$

を満たす連続線形写像 $\varphi\in \boldsymbol{L}(E;\ F)$ が存在することである。このとき，φ を写像 f の**点 $\boldsymbol{a}$ における微分**といい，$f'(a)$，$Df(a)$ などの記号で表す。なお，$f'(a)(h)$ は $f'(a).h$，$f'(a)h$ などと書くのが習慣である。

f が U の各点で微分可能であるとき，**$\boldsymbol{U}$ において微分可能**，あるいは単に**微分可能**であるという。

定義 2. 1. 2　写像 $f\colon U\to F$ が U において微分可能であるとき

$$(2.\ 1.\ 2)\quad \begin{aligned} U &\xrightarrow{f'} \boldsymbol{L}(E;\ F)\\ x &\longmapsto f'(x)\end{aligned}$$

なる写像を f の**導写像**という。

f の導写像 f' が U の各点で連続であるとき，f は **$\boldsymbol{C}^1$ 級**，あるいは **$\boldsymbol{C}^1$ 写像**であるという。

o (**omicron 記号**)：関数 $\alpha\colon E\to\mathbf{R}$ が

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha(x)}{|x|}\xrightarrow{|x|\to 0,\ |x|\neq 0}0,\\[2ex] \alpha(\bar{0})=0\end{cases}$$

を満たすとき