政策科学方法論（二）

小林秀徳

三、効率性の論理

前節では、代替案aとbの間の社会的選好関係を個人のもつ順序の集計として導く手続を問題としたが、個人の選好が順序として表明されるという前提の当否は問わなかった。しかも、代替案を社会状態を表わすベクトルと考えることの前提には、代替的社会状態を実現するための社会的行為のプログラムは、ベクトルの要素として社会状態に含まれているか、社会状態と一意的に対応するか、その選択が問題とならないか、のいずれかが措定されていたはずである。また、社会的選択論からわれわれが抽き出した結論は、分析家は直接に代替案の望ましさを取扱うことから逃避的であってはならないというものであった。本節では、代替案のもつ属性を、望ましさに関るもの（m個の結果属性）と行為に関わるもの（n個の手段属性）に分け、R^nからR^mへの写像を与えることにより、分析者の立場から代替案集合を効率的なものとそうでないものの二つに分割することを考える。

代替案集合は、個人または個人の集合による行為の実行可能性によって限定されるはずであり、手段属性のと

り得る値の範囲（政策空間）から任意の点を選ぶことにより、それに対応する結果属性を一意的に求めることが可能であるならば、この値域（目標空間）に属する点の間での優劣に基いて、政策空間をさらに効率性によって限定することができるであろう。

無論このことは選好に関する情報の利用可能性によって基本的に制約される。目標空間が一次元尺度で表わされ、選好がこの尺度の正の方向と一致するなら（一致するように尺度を構成することができるなら、と言った方が良いかも知れない）、この問題は、政策空間を制約集合とする最大値問題に還元される。このような尺度構成上の技術的問題は、多属性効用理論のタイトルの下で体系的に考察されており、多属性効用関数を実際に計測するためのコンピューター・プログラムが、ラルフ・キーニィやその他によって開発されてきている。[25]しかし、意思決定者に対して、どのように意思決定を下すことが合理的かを教えること（彼自身のリスクに対する態度や目標間の限界代替率を導き出してそれと一貫性をもつような選択を強要すること）と、社会的コンテクストの中で、より望ましい代替案に到達するための処方を分析者として呈示することとは同じではない。多属性効用の理論は、規範論として然るべき地位を占めているのであり、政策分析の手法としての応用可能性は、少くとも、(ア)推定手続の煩瑣な厳密性と善意独裁者の虚構性との間の理念的ギャップ、(イ)選好構造を明らかにすることと代替案の効率性を議論することとの目的の相違、(ウ)効用のもつダイナミックな情況依存性、等々を考慮するとき、多くを期待し得ないと言い得る。

多重次元の目標空間での最適化は、規範的立場からの一次元的尺度を導入しない場合においても、選好に関する何らかの情報を得て初めて可能となる。実際、一九七〇年代に開発された多目標数理計画法の多くのアルゴリズムは、意思決定者の選好をどのような形で抽き出し計算に投入し得るかについての想定によって互いに異なる

ものであり、手法の優劣は、この想定の現実的適合性によって決せられるべきものである。但し、この適合性は、適用事例が決定的に不足している現状では、それを体系的に議論し得るベースが存在しない。(27)(28)

簡単化のために〔1〕式で表わされるコンパクトな政策空間を考えよう。

$$X=\{x \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0,\ x \in R^n\} \qquad 〔1〕$$

ここでAは$l \times n$行列である。さらに$m \times n$行列Cによって、目標空間が〔2〕式のように与えられるものとする。

$$Y=\{Cx \mid x \in X\} \qquad 〔2〕$$

凸の劣位錐ΛとYに属するy^1、y^2が与えられたとき、〔3〕が成り立つならy^1はy^2の劣位にあるという。

$$y^1 \in y^2+\Lambda \text{ かつ } y^1 \neq y^2 \qquad 〔3〕$$

もしyがYに属する他のいかなる点によっても劣位にあるとされないならば、yは非劣等解（N点）であるといい、然らざれば、劣等解（D点）であるという。

同様にして、政策空間の点x^1、x^2に対しても

$$Cx^1 \in Cx^2+\Lambda \text{ かつ } Cx^1 \neq Cx^2$$

のときx^1はx^2の劣位にあるといい、xが他のいかなる点によっても劣位にあるとされないならばN点、然らざればD点という。すべてのN点の集合をN、すべてのD点の集合をDで表わす。

以上のような用語の定義と、本節の目的との関係はほとんど明らかであろう。Λが選好構造によって定まり（例えば、目標空間のこれこれの次元は大なるほど良く、かれかれは小なるほど良い、という具合に決まり）、代替案集合

（政策空間）の中から効率的なるものの集合（N）がそうでないもの（D）と明確に区別されて呈示されるなら、その手続は政策分析の手法として有望であり、またそのような集合の性質を明らかにすることが、効率性を求めてする分析の限界をも照射し得ることになるであろう。以下の諸性質が知られている。

(1)　Dは凸集合である。

何となれば、政策空間の点x^1、x^2についてx^1がD点であれば、x^1、x^2を端点とする線分はDに含まれるからである。(28)

Xの任意の凸部分集合をKとする。Kの閉包を$\overline{K}$、相対内部（$\overline{K}$によって生成される多様体において誘導された相対位相の内点の集合）をK^Iであらわす。

(2)　次の事柄が証明される。(29)

(i)　$x^1 \in K^I$ かつ $x^1 \in D$ ならば $K^I \subset D$

(ii)　$x^1 \in K^I$ かつ $x^1 \in N$ ならば $\overline{K} \subset N$

Xは有限個の端点の凸包であるから、すべての端点の集合を

$$X_{ex} = \{x^1, \ \ldots, \ x^r\}$$

とするとき、

$$X = \{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i \mid \alpha_i \geqq 0 \text{ かつ } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1\}$$

と表わされる。非劣等端点の集合を $N_{ex} = N \cap X_{ex}$ とするとき、

(3)　Nは N_{ex} による凸包の部分集合である。[30]

これを $N \subset \mathbb{H}(N_{ex})$ と書く時、普通の場合、$N \neq \mathbb{H}(N_{ex})$ である。

Λに含まれる最大部分空間をLとし、Lに直交する部分空間$L^{\perp}$とΛの共通部分を$\Lambda^{\perp}$とする。さらにΛの共役錐を

$$\Lambda^* = \{\lambda \mid \lambda \cdot d \leqq 0 \text{ for all } d \in \Lambda\}$$

とする。

(4)　劣位錐Λが $\Lambda^{\perp} \neq \{0\}$ という性質をもてば

$$\cup \{X^0(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{Int} \Lambda^*\} \subset N \subset \cup \{X^0(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^*,\ \lambda \neq 0\}$$

である。ただし、

$\lambda \in R^m$ に対し、

$$X^0(\lambda) = \{x^0 \in X \mid \lambda C x^0 \geqq \lambda C x,\ x \in X\} \qquad [4]$$

とする。

(5)　次の事柄が示される。[31]

Λが凸多面錐であれば

(i)　$N \subset \{X^0(\lambda) \mid \lambda \in (\Lambda^*)^I\}$

(ii)　$\operatorname{Int} \Lambda^* \neq \phi \longrightarrow N = \cup \{X^0(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{Int} \Lambda^*\}$

Λが多面錐なら、Λ^*もまた多面錐であり、

$$\Lambda^*=\{\sum_{i=1}^{q}\alpha_i H^i \mid \alpha_i \geqq 0\}$$

となるベクトルの集合 $H=\{H^1, \dots, H^q\}$ が存在する。これをH^kが第k行を表わす行列と考えれば、

$$\Lambda^*=\{\alpha H \mid \alpha \geqq 0\}$$

$$(\Lambda^*)^I=\{\alpha H \mid \alpha > 0\}$$

と表わせる。$\lambda=\alpha H$ とすれば、与えられたαに対して、

$$X^0(\alpha)=\{x^0 \in X \mid \alpha HCx^0 \geqq \alpha HCx,\ x \in X\} \qquad 〔5〕$$

と置けば、

$$\cup\{X^0(\lambda) \mid \lambda \in (\Lambda^*)^I\}=\cup\{X^0(\alpha) \mid \alpha > 0\}$$

となる。かくして

(6) Λが多面錐ならば、

(i) $N \subset \cup\{X^0(\alpha) \mid \alpha > 0\}$

(ii) $\mathrm{Int}\,\Lambda^* \neq \phi \longrightarrow N=\cup\{X^0(\alpha) \mid \alpha > 0\}$

を得る。

$\Lambda^{\leqq}=\{\alpha \in R^m \mid \alpha \leqq 0\}$ ならば

$$\mathrm{Int}\,(\Lambda^{\leqq})^*=\Lambda^{>}=\{\alpha \in R^m \mid \alpha > 0\}$$

であるから、HCx を新しい目的関数の集合として扱うことにより、所与の多面劣位錐を$\Lambda^{\leqq}$の形へと変換してN

を求めることが可能となる。すなわち、$X^0(\lambda)$ はX上での λCx の最大値を与える解の集合であるから、通常のシンプレックス表の操作により、すべての最適解の集合を、基底可能最適解の凸包として導き出すことができる。次にλを$\Lambda^>$上で動かすことによりNの全体が得られる。

mもnも2として図を描いてみると図—1のようになる。辺AB上の点x^0を通り、C^1、C^2を法線ベクトルとする二本の直線を引く。他の実行可能解x^1において同様の二本の直線を引いた時、二本とも元の直線より右上方にあれば、x^0はx^1の劣位にある。x^0が非劣等解であれば、どのような実行可能解x^1に対しても、このような直線のうち少くとも一本は必ず左下方に位置している。$\Lambda^>$から任意のλを選んで目的関数 λCx を作ってやると、この目的関数の法線ベクトルは必ず凸多面錐

$$\{\lambda C|\lambda\geqq 0\} \quad 〔6〕$$

の内点になっている。したがって、λが$\Lambda^>$上を動くとき目的関数の傾きは図の矢印の範囲内を動く。したがって、このような手続から求まる最適解は〔A点〕、〔B点〕および線分ABである。このことから、凸多面体の任意の面がN点を含むかどうかの吟味には、その面の法線ベクトルが凸多面錐〔6〕に属するか否かを調べれば良いことがわかる。

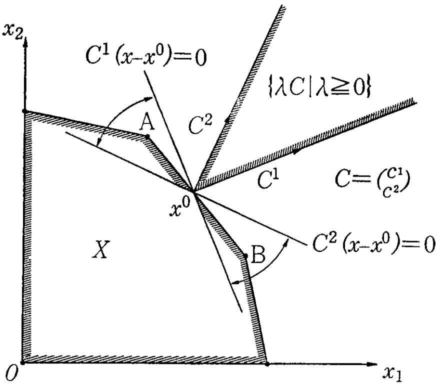
以上の説明により明らかなようにNは多くの、通常無限個の要素からなる。xが社会的行為の活動水準である場合に、m個の目標のうちのあるものは、ある特定のメンバーによって特に選好され、他の目標はまた別のメンバーによって選好されるという場合は多い。その際、線分AB上で、どちらの端に寄って決定がなされるかは重大な関心事となろう。このような情況では、政策分析者は、パレート最適解の一つを呈示するだけでは十分でな

く、パレート最適解全体と、対応するλの値の範囲に関する情報の提供が望まれるのである。

したがって、政策分析における効率性の論理は、一部のシステム・アナリストの間で考えられているのとは異なり、所与の目的に対して費用を最小化する代替案の開発・呈示に向けて展開されるのではなく、あるいは費用を一定にして目的の極大化を追求するのでもなく、㈠劣等解を代替案からとり除くこと、㈡非劣等解の間での選択を目的間のウェートと関係付けて示すこと、の二つの作業を通して具体化される。

政策問題の解決へ向けての社会的行為の選択において、多くの場合多数の解が存在するのは、目標空間の多次元性に由来するのであり、分析者の立場からの効率性の追求は、そこに主観的価値判断を含めないならば、上述の㈠㈡に尽きるのではあるまいか。もし主観的判断を含めるのならばそこは多数の主観が相互作用をもつ社会的プロセスであることを認め、大統領を端末機の前に座らせるといった仕方でではなく、前節で考察した困難を乗り越える分析上の工夫が擬らされなければならないだろう。

図1



（以下次号）

註（25） 多属性効用理論については次の書がすぐれた読み物である。
Ralph L. Keeney and Haward Raiffa *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* (New York: Wiley, 1976)

(26) 提案されている手法には少くとも一ダース以上のものがあり、その中には内部的一貫性や計算上の負荷といった点で問題を抱えているものもある。しかしいずれも現実的適用経験が決定的に不足していることは否めず、そのことが、選好に関する情報の利用可能性に対する想定の非現実性を物語るものであるのか、あるいは単に、手法の新しさに由来するものであるのか、現時点では断定を避けたいところであるが、筆者は恐らく前者であろうという直観を持っている。後者であるとする学者は大勢いる。例えば、

Gerald W. Evans "An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs" *Management Science* Vol. 30 No. 11, 1984. pp. 1268—1279.

(27) 大雑把に言って、多目標数理計画法の手法は、意思決定者の選好表明を最適化のどの段階で要請するかによって三種に分類することができる。㈠最適化前、㈡最適化中、㈢最適化後、の三つである。㈠は前に述べた多属性効用関数の計測手続の問題であり、本節でのわれわれのアプローチは㈢である。もし㈠か㈢が現実的に実行可能であるなら、多目標最適化は余り困難な問題を含んでいない。すなわち、㈠選好構造が完全に明らかになっているか、㈢効率解のすべてが認識対象となるかのどちらかが仮定し得るなら困難はない。選好構造についての部分的な情報を得て、効率解の一部を求め、それに基き、さらに追加情報を得る、といった繰り返し手続を含む㈡のアプローチが現実的とされる所以である。しかし、政策分析手法としては、㈡が最も非現実的であるように筆者には思われる。それは、対話型のアプリケーション・ソフトを使用して端末機のキーをたたく意思決定者というものがそこに想定されているからで、政策科学の対象となるほとんどの政策問題について、これは最も考え難い情況の一つである。

(28) $x^1\in D$ より $Cx^1=Cx^3+h$ となるような $x^3\in X$, $h\in\Lambda$, $h\neq0$ が存在する。したがって任意の α、$0<\alpha\leq1$ に対して

$$C(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2)=\alpha Cx^3+\alpha h+(1-\alpha)Cx^2$$

$$=C(\alpha x^3+(1-\alpha)x^2)+\alpha h$$

$\alpha x^3+(1-\alpha)x^2\in X,\ \alpha h\in\Lambda,\ h\neq 0$

より、

$$\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\in D$$

を得る。

(29) (i)は明らか。また(i)より $K^I\subset N$。もし $x^2\in\partial K$ がDに属するなら、$(x^2,\ x^1)\subset D$ となり、$(x^2,\ x^1)\subset K^I$ なので、このことは $K^I\subset N$ と矛盾する。したがって $x^2\in N$。

(30) xが非劣等端点の凸結合で表わされないものとしよう。仮定により、少くとも一つの点x^kおよびα^kが存在して、

$$x^k\in D\cap X_{ex} \text{ かつ } 1\geqq\alpha_k>0,\ 1\leqq k\leqq r$$

であり、

$$x=\alpha_k x^k+\sum_{j\neq k}\alpha_j x^j$$

と書き表わすことができる。ここで、

$$\alpha_j\geqq 0,\ j=1,\ \ldots,\ r,\ \sum_{j=1}^{r}\alpha_j=1$$

である。$\alpha_k=1$ なら $x=x^k$ で、明らかにxはD点である。$\alpha_k<1$ のとき、

$$\beta=\sum_{j\neq k}\alpha_j \text{ として}$$

$$x=\alpha_k x^k+\beta\sum_{j\neq k}\frac{\alpha_j}{\beta}x^j$$

とすると、$\sum_{j \neq k} \frac{\alpha^j}{\beta} x^j \in X$, $\alpha_k + \beta = 1$

より、xはD点となることがわかる。

(31) 仮りに $x^0 \in X$ かつ $x^0 \notin \{X^0(\lambda) \mid \lambda \in (\Lambda^*)^I\}$ としよう。各々のλに対して

$$\lambda Cx > \lambda Cx^0$$

となる $x \in X$ が存在することになる。

$y = Cx$, $y^0 = Cx^0$ と置けば、各λに対し、

$$\lambda y > \lambda y^0$$

となる $y \neq y^0$, $y \in Y$ が存在している。

$Y' = Y - \{y_0\}$ とすれば $0 \in Y'$ で、各λに対して

$$\lambda \tilde{y} > 0$$

となる $\tilde{y} \in Y'$ が存在するから、

$$0 \in y - y^0 + \Lambda$$

となるようなyで、$y - y^0 \in Y'$, $y \in Y$, $y \neq y^0$ となるものが存在することになる。したがって、

$$y^0 \in y + \Lambda$$

だから、$y^0 \notin N$

$$x^0 \notin N$$

である。このことと(4)から(ii)が成立する。

(32) 本節の註に示した諸定理の証明は次に負う。

PoLung Yu and Milan Zeleny
"The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method"
Journal of Mathematical Analysis and Applications 49, 1975. pp. 430—468.