off_nat;

として従来の形式の出力を得ておく必要がある。　　　　(1987年12月15日)

際しては，どのようなモデルを構成しどのように数学的道具を適用するかという経済学の知識が要求される。しかし有能な計算助手＝REDUCE を利用して自らはモデル・ビルディングに多くの時間を費すことは，比較優位の原理の示唆する望しい方向ではなかろうか。

参照文献

吹春俊隆（1985）「*IS-LM* 分析の国際的側面」，『国民経済雑誌』第152巻1号。

小平裕（1984）「資産分配の Gini 係数について」，『国民経済』150号。

戸島熙（1985）「数理経済学への応用」，論文集〔6〕に収録。

論文集

〔1〕『REDUCE プログラミング資料』第1集，（東京大学大型計算機センター，1984年3月）。

〔2〕同第2集（1985年3月）。

〔3〕同第3集（1986年3月）。

〔4〕同第4集（1987年3月）。

〔5〕N. Inada and T. Soma eds. (1985), *Symbolic and Algebraic Computation by Computers*, (World Scientific Publishing Company).

〔6〕後藤英一・一松信・広田良吾編（1986），「計算機による数式処理のすすめ」(bit 1986年3月号別冊)。

追記：REDUCE のバージョン・アップについて

REDUCE は1987年7月にバージョン3.3に更新され，パソコン用への移植も同年12月に完了した。注1で述べたように本稿ではバージョン3.2を利用している。新バージョンでは全般的に機能が強化され，いくつかのコマンドが追加されている（例えば TR など)。また利用者の作成したモジュールが User-Contributed-Packages として付加され便利になった。旧バージョンと比べてシステムが大きくなった分だけ処理が遅くなったが，使用法に大きな違いはない。目立つ相違は有理式の分数の出力の改善で，分子と分母が破線の上下に表示される。例えば表3-1の18行目の入力に対する出力は，

```
     L - T + U
P := ---------
       2*U
```

と見易くなった。しかし計算結果を後で入力に利用するには

表4-1

	数学	物理学	工学	経済学
REDUCE プログラミング資料				
第1集（1984）	8	6	1	0
第2集（1985）	3	2	0	0
第3集（1986）	6	6	8	1
第4集（1987）	9	0	9	0
Inada and Soma eds. (1985)	3	1	0	1
bit 別冊（1986）	5	1	1	1

は明白であろう。

その理由は幾つか考えられる。第1に計算機はまだ経済学研究者にとっては難しいものであり，REDUCE もその存在を知られていないという事実が考えられる。第2に関数形が特定されていないと REDUCE は利用できないという事が大きな妨げになっている。例えば生産関数を単に $F(K, L)$ とおいてこれを K に関して偏微分して資本の限界生産力を求めるというような利用はできない。コブ＝ダグラス型とか CES 型のような具体的な関数形を生産関数に与えなくてはならない。第3に，経済学では符号判定が重要になることが多いが REDUCE はこれを自動的に行うことはできない。戸島（1985）は正の項にプラス1，負の項にマイナス1の値を代入してプログラムで符号判定を行うという工夫をしているが，第2節の例のように加減を含む多項式にはこの方法は使えない。

このような欠点があることを認めた上で，REDUCE による数式処理は正確であり迅速であるので，もっと利用されるべきである。多項式の代入と整理を繰返す場合筆算では何回か検算を行わないと得られた結果に不安を抱くが，計算機による処理では安心できる。早さについては上の例が良い証拠である。いずれも大型機では1秒以内（パソコンでも1分足らず）に計算されている。勿論 REDUCE は自動問題解決システムではない。利用に

〜396行で計算している。結果を整理すると

$$\text{(3-14)} \quad \mathrm{Gini} = \frac{20L^2(L-R)^2 + 20u^2L(L-R) - u^3(8L-3R)}{20L(L-R)\ \{3L(L-R) + 6uL - u^2\}}$$

となる。寿命が確実な場合この値は丁度⅓になる（398〜402行）。

$$\text{(3-15)} \quad \mathrm{Gini}\Big|_{u=0} = \frac{1}{3}$$

最後に不確実性が増した時の Gini 係数の変化を調べるために，(3-14) を u で微分し $u=0$ の近傍で評価すると

$$\text{(3-16)} \quad \frac{d\,\mathrm{Gini}}{du}\Big|_{u=0} = -\frac{2}{3(L-R)} < 0$$

を得る（404〜408行）。したがって寿命の長さの違いの大きな社会程，資産分配は平等になると結論される。

なお以上の計算に要した時間は，410〜413行に示されているように，パソコンで51秒であった[9]。

4. むすび

上の２つの応用例は，古典力学的数理経済学で利用される主要な数学的道具である行列，微分，積分を多用している。そして REDUCE はこれらに対して強力な処理能力を持っていることが示された。しかし経済学で数学の利用が盛んなわりには，REDUCE の応用はそれ程多くない。**表 4-1** はこれまでに報告された REDUCE の応用例を分野別に分類したものである[10]。報告されていない応用例も数多くあろうし，専門外のテーマの分類には心もとないところがあるが，経済学での使用例が非常に少ないこと

---

9) バージョン 3.3 では57秒，大型機では 831 ミリ秒であった。

10) 東大大型計算機センターでは「REDUCE による数式処理を広める為の一番の方法は，プログラミング例を広く集め出版することである」との見地から『REDUCE プログラミング資料』をこれまで４冊発行している。また Inada and Soma (1985) は，第２回「計算機による数式処理の学際的応用に関する国際シンポジウム」（理化学研究所主催，1984年８月）の報告集である。

(3-5) を定義している。50～68行と101～129行は入力ミス防止のための代入作業である。

Lorenz 曲線を描く準備として，貯蓄残高がある値 S 以下の人々の人数 x を求めているのが132～200行である。例えば x_a は生存確率 $p(t)$ の t_2 から $(L+u)$ までの定積分として与えられる（(3-6)式）が REDUCE では定積分を直接行えないので，不定積分演算子 INT と SUB 演算子を組合せて行う。INT 演算子は

INT（〈関数〉，〈変数〉）

の形で利用する（134行)。得られた原始関数を ip と名付け，次に SUB 演算子を利用して定積分の値を求めている（139～149行)。139行の入力に対する結果は142～143行の 2 行をあわせて，

$$IP1:=\frac{L^2+2LU+U^2}{4U}$$

と読む。つまり冪乗の数字の出力のために 1 行使われている。151行の ws は直前の計算結果を書いたのと同じ意味になる。ここでは xb2 は 1 行上の x1 と同じものになる。172～200行は再び入力ミスのための確認作業である。同様に S 以下の貯蓄残高を持つ人々の資産総額 y の定義を203～314行で与えている。

関係 (3-10) を利用して Lorenz 曲線の下の A，B，C の面積を求めているのが，318～376行である。例えば319～332行では A の面積 (3-11) を計算している。最初に 319 行で不定積分 $\int y_a x'_a dS$ の原始関数 iaa を求め，次に328～332行で定積分の結果（これを aa とする）を得ている。ここに現われる DF は（偏）微分演算子であり，

DF（〈関数〉，〈変数〉，〈微分回数〉，〈変数〉，〈微分回数〉，……）

のように使う。微分回数が 1 の時にはこれを省略できる。B の面積 (3-12) を334～356行で，C の面積 (3-13) を358～376行で計算している。

続いて378～383行目で三角形の面積 tr を求め，Gini 係数 (3-9) を385

```
          3          2              2             2            2
BB := (R*U *W*(124*L  + 37*L*R - R ))/(240*L*(L  - 2*L*R + R ))

icc:=int(yc*df(xc,s),s);


              3  2       2                  2  2  2    3  2  2       2  2   2
ICC := (L*S*(L *S  + 3*L *R*S*U*W - L*R *U *W  + R *U *W ))/(6*R *W *(L

                          2
              - 2*L*R + R ))

cc:=sub(s=s3,icc)-sub(s=s2,icc);


             4      3       3        2  2      2         2  2       3
CC := (R*W*(L  - 3*L *R + 3*L *U + 3*L *R  - 6*L *R*U - L *U  - L*R  + 3*L

            2             2       3     2  2      3       2               2
          *R *U + 2*L*R*U  - 3*L*U  - R *U  - R*U ))/(6*(L  - 2*L*R + R

          ))

%triangle;
tr:=xt*yt/2;


                  2                    2
TR := (R*W*(3*L  - 3*L*R + 6*L*U - U ))/12

%gini coefficient;
gini:=1-(aa+bb+cc)/tr;


              4        3          2  2        2  2               2         3
GINI := (20*L  - 40*L *R + 20*L *R  + 20*L *U  - 20*L*R*U  - 8*L*U  + 3*R*

         3           3       2        2            2                 2
         U )/(20*L*(3*L  - 6*L *R + 6*L *U + 3*L*R  - 6*L*R*U - L*U  + R*

               2
               U ))

%for certain life case;
sub(u=0,gini);


1/3

%effect of uncertainty;
sub(u=0,df(gini,u));


( - 2)/(3*(L - R))

showtime;


TIME: 51000 MS

end;

2:
```

```
     2
(R*U *W)/(6*L)

sub(s=0,yb);


     2
(R*U *W)/(6*L)

sub(s=s2,yb);


     2
(R*U *W*(8*L + R))/(6*L*(L - R))

sub(s=s2,yc);


     2
(R*U *W*(8*L + R))/(6*L*(L - R))

yt:=sub(s=s3,yc);


                2                      2
YT := (R*W*(3*L  - 3*L*R + 6*L*U - U ))/(6*L)

sub(a=0,yt);


          2                      2
(R*W*(3*L  - 3*L*R + 6*L*U - U ))/(6*L)

%
%calculation of gini coefficient;
%areas aa, bb, and cc;
iaa:=int(ya*df(xa,s),s);


             4  4        3    3               2  2  2  2  2          3    3  3
IAA := (S*(L *S  + 5*L *R*S *U*W + 10*L *R *S *U *W  + 10*L*R *S*U *W  + 5

             4  4  4         4  2  4
           *R *U *W ))/(60*R *U *W )

aa:=sub(s=0,iaa)-sub(s=s1,iaa);


         3
AA := (R*U *W)/(60*L)

ibb:=int(yb*df(xb,s),s);


               6  4      5    4        5    3           4  2  4        4  2  3
IBB := (S*(4*L *S  - 8*L *R*S  + 20*L *R*S *U*W + 4*L *R *S  - 15*L *R *S

                    4  2  2  2  2       3  3  3          3  3  2  2  2
           *U*W + 40*L *R *S *U *W  - 5*L *R *S *U*W + 20*L *R *S *U *W

              3  3    3  3        2  4  2  2  2       2  4    3  3
           + 40*L *R *S*U *W  - 20*L *R *S *U *W  + 40*L *R *S*U *W  + 20

             2  4  4  4         5    3  3        6  4  4         4  2  4
           *L *R *U *W  + 40*L*R *S*U *W  - 20*R *U *W ))/(240*R *U *W *(

             2            2
            L  - 2*L*R + R ))

bb:=sub(s=s2,ibb)-sub(s=0,ibb);
```

```
               3      2           2    3
IPH1 := (R*W*(L  + 3*L *U + 3*L*U  + U ))/(6*L*U)

ya:=iph1-sub(t=t2,iph);


        3 3      2   2                2    2 2    3 3 3        2    2
YA := (L *S  + 3*L *R*S *U*W + 3*L*R *S*U *W  + R *U *W )/(6*L*R *U*W )

yb2:=ws;


         3 3      2   2                2    2 2    3 3 3        2    2
YB2 := (L *S  + 3*L *R*S *U*W + 3*L*R *S*U *W  + R *U *W )/(6*L*R *U*W )

sub(s=s1,ya);


0

sub(s=0,ya);


     2
(R*U *W)/(6*L)

ig:=int(g-s1,t);


IG := (T*W*(L*T - R*T + 2*R*U))/(2*L)

yb1:=sub(t=t1,ig)-sub(t=0,ig);


YB1 := (S*(L*S + 2*R*U*W))/(2*W*(L - R))

yc1:=ws;


YC1 := (S*(L*S + 2*R*U*W))/(2*W*(L - R))

yb:=yb1+yb2;


        4 3    3   3      3   2          2  2    2 2       3    2 2
YB := (L *S  - L *R*S  + 3*L *R*S *U*W + 3*L *R *S*U *W  + 3*L*R *S*U *W

            3 3 3   4 3 3        2   2
        + L*R *U *W  - R *U *W )/(6*L*R *U*W *(L - R))

ih:=int(h-s1,t);


IH := (R*T*W*(2*L - T + 2*U))/(2*L)

yc:=yc1+sub(t=1-u,ih)-sub(t=t2,ih)+iph1-sub(t=1-u,iph);


          3 2      2              2 2 2    3 2 2
YC := (3*L *S  + 6*L *R*S*U*W - L*R *U *W  + R *U *W )/(6*L*R*W*(L - R))

sub(s=s1,ya);


0

sub(s=0,ya);
```

```
            2                     2
IP1 := (L  + 2*L*U + U )/(4*U)

xa:=ip1-sub(t=t2,ip);


          2  2                          2  2  2        2    2
XA := (L *S  + 2*L*R*S*U*W + R *U *W )/(4*R *U*W )

xb2:=ws;


           2  2                          2  2  2        2    2
XB2 := (L *S  + 2*L*R*S*U*W + R *U *W )/(4*R *U*W )

xb:=t1+xb2;


          3  2     2    2        2                    2                   2  2  2    3  2
XB := (L *S  - L *R*S  + 2*L *R*S*U*W + 2*L*R *S*U*W + L*R *U *W  - R *U *

          2      2    2
        W )/(4*R *U*W *(L - R))

xc:=t1+l-u-t2+ip1-sub(t=l-u,ip);


          2
XC := (L *S)/(R*W*(L - R))

sub(s=s1,xa);


0

sub(s=0,xa);


U/4

sub(s=0,xb);


U/4

sub(s=s2,xb);


(L*U)/(L - R)

sub(s=s2,xc);


(L*U)/(L - R)

xt:=sub(s=s3,xc);


XT := L

%
%calculation of  y;
%integrand of  p*(h-s1);
iph:=int(p*(h-s1),t);


                         2                  2               2
IPH := (R*T*W*(3*L  - 3*L*T + 6*L*U + T  - 3*T*U + 3*U ))/(6*L*U)

iph1:=sub(t=l+u,iph);
```

```
%
%minimum level of wealth (at age of l+u);
s1:=sub(t=l+u,h);


S1 := ( - R*U*W)/L

%wealth at age l-u;
s2:=sub(t=l-u,h);


S2 := (R*U*W)/L

%maximum level of wealth (at age of r = retirement);
s3:=sub(t=r,g);


S3 := (R*W*(L - R))/L

%the age of worker when his saving balance is  s;
t1:=(1/w)*l/(l-r)*s;


T1 := (L*S)/(W*(L - R))

%the age of retired when his saving balance is  s;
t2:=l*(1-s/(w*r));


T2 := (L*(R*W - S))/(R*W)

sub(s=0,t1);


0

sub(s=s3,t1);


R

sub(s=s3,t2);


R

sub(s=s2,t2);


L - U

sub(s=0,t2);


L

sub(s=s1,t2);


L + U

%
%x = population whose wealth is less than s;
%integrand of  p;
ip:=int(p,t);


IP := (T*(2*L - T + 2*U))/(4*U)

ip1:=sub(t=l+u,ip);
```

表3—1

```
StaffLISP/86  Ver. 3.2   Copyright (c) 1987 B U G, Inc.
REDUCE        Ver. 3.2   Copyright (c) 1985 The Rand Corporation

Start time = Sep. 22 1987 (Tue) 21:12:16

REDUCE 3.2, 15-Apr-85 ...

1: in "b:gini.red";
%calculation of gini coefficient of wealth;
%       uncertainty case;
%                               september 21, 1987;
%on time;
on gcd;


%
%the probability of being alive at age  t;
p:=-1/(2*u)*t+(1+u)/(2*u);


P := (L - T + U)/(2*U)

sub(t=l-u,p);


1

sub(t=l,p);


1/2

sub(t=l+u,p);


0

%
%time profile of individual saving;
g:=w*(1-r/l)*t;


G := (T*W*(L - R))/L

h:=w*r*(1-t/l);


H := (R*W*(L - T))/L

sub(t=0,g);


0

sub(t=r,g);


(R*W*(L - R))/L

sub(t=r,h);


(R*W*(L - R))/L

sub(t=l,h);


0

```

t_1，t_2 はそれぞれ S の関数であるから，Lorenz 曲線は結局 S による媒介変数表示 (3-6)～(3-8) により与えられ，**図 3-2** のように描かれる。

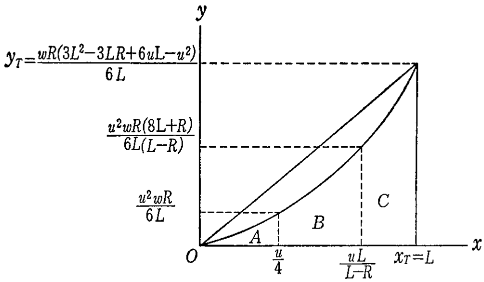

図3-2　Lorenz 曲線

この図において Gini 係数は三角形に対する曲線と対角線にはさまれた部分の面積比として定義される。すなわち

(3-9)　$$\text{Gini}=1-\frac{(A+B+C)\text{の面積}}{\text{三角形の面積}}$$

により与えられる。まず，関係

(3-10)　$dx=x'dS$

を利用して図3-2の A，B，C の面積を求めることにする。

(3-11)　$$A\text{の面積}=\int_{S_1}^{0}y_a x_a' dS$$

(3-12)　$$B\text{の面積}=\int_{0}^{S_2}y_b x_b' dS$$

(3-13)　$$C\text{の面積}=\int_{S_2}^{S_3}y_c x_c' dS$$

この計算過程を示したのが**表 3-1** である。以下では前節と違うところを中心に説明しよう。

18行は ($L-u$) 歳以降の生存確率 (3-1) の定義を与えている[8]。次の23～36行では特定の時点における生存確率の値を SUB 演算子により求めている。このような作業は入力ミスを発見するのに役立つ。

39～48 行では勤労期間中と退職後の貯蓄残高 (3-4) を，71～99 行では

8) ($L-u$) 歳までの生存確率は 1 である。

このような個人により構成される社会の資産分配を考慮しよう。年齢を除けば人々はあらゆる特性で等しいので，個人資産のライフ・サイクル・パターンを描いた図3-1の横軸は「世代」と読みかえることができる。つまりある個人が t 歳時に保有する資産は，特定の時点に t 歳の人々つまり第（$L+u-t$）世代の人々の貯蓄残高に等しい。横軸の読みかえをこのように行うと，図3-1の上のパネルはある時点における世代別資産分布として解釈できる。各世代の人口は下のパネルから読みとることができる。貯蓄残高が S 以下の人々の人数を x，その人々の保有する資産の総額を y として Lorenz 曲線を描くことにすると，x と y は S の関数として次のように与えられる。

(a)　$S_1 \leqq S \leqq 0$ の場合

$$x_a=\int_{t_2}^{L+u} p(t)\,dt$$

(3-6)

$$y_a=\int_{t_2}^{L+u} p(t)[h(t)-S_1]dt$$

(b)　$0 \leqq S \leqq S_2$ の場合

$$x_b=\int_0^{t_1} dt+\int_{t_2}^{L+u} p(t)\,dt$$

(3-7)

$$y_b=\int_0^{t_1}[g(t)-S_1]dt+\int_{t_2}^{L+u} p(t)[h(t)-S_1]dt$$

(c)　$S_2 \leqq S \leqq S_3$ の場合

$$x_c=\int_0^{t_1} dt+\int_{t_2}^{L-u} dt+\int_{L-u}^{L+u} p(t)\,dt$$

(3-8)

$$y_c=\int_0^{t_1}[g(t)-S_1]dt+\int_{t_2}^{L-u}[h(t)-S_1]dt+\int_{L-u}^{L+u} p(t)[h(t)-S_1]dt$$

により与えられる[7]。**図3-1**の上のパネルは貯蓄残高(3-4)のグラフを，下のパネルは生存確率(3-1)のグラフを描いている。ここでS_1は資産保有の生涯最小値，S_2は$(L-u)$歳時の値，S_3は生涯最大値である。また貯蓄残高が丁度Sに等しくなる年齢をt_1，t_2とする。ただし，$0 \leqq t_1 \leqq R \leqq t_2 \leqq L+u$

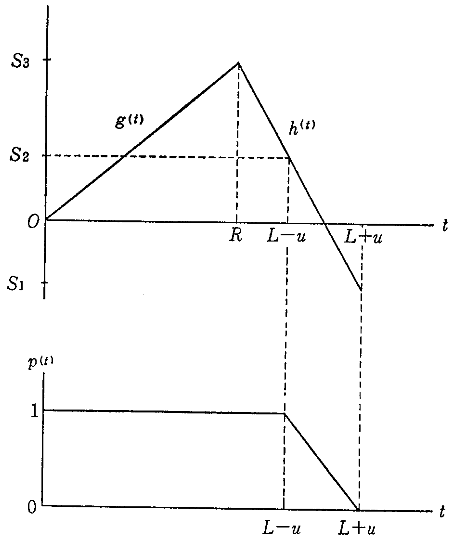

図3-1　資産のライフ・サイクル・パターンと生存確率

$$S_1 = S(L+u) = -\frac{uwR}{L}$$

$$S_2 = S(L-u) = \frac{uwR}{L}$$

$$\text{(3-5)} \qquad S_3 = S(R) = wL\left(1-\frac{R}{L}\right)$$

$$t_1 = g^{-1}(S) = \frac{1}{w}\ \frac{LS}{L-R}$$

$$t_2 = h^{-1}(S) = L\left(1-\frac{S}{wR}\right)$$

7)　L歳から$(L+u)$歳までの間の個人貯蓄残高は非正である。これは社会的には$(L-u)$歳からL歳までの間に正の資産を残して死亡した人々からの移転により埋め合される。これが仮定(v)の意味である。

づく資産保有の違いを反映するものとして説明されよう。

単純化のために，(i)人々の平均寿命はL年で最初のR年間労働する，(ii)人々は（$L-u$）歳から（$L+u$）歳の間に死亡する，(iii)利子率，人口成長率は共に0である，(iv)賃金率は一定である，(v)生命保険，年金が利用できると仮定する。

代表的個人を考えよう。t歳の時に生存している確率を$p(t)$とすれば，（$L-u$）歳まではこの値は1であり，それ以降は単調に減少し（$L+u$）歳で丁度0となる。すなわち

$$(3\text{-}1)\qquad p(t)=\begin{cases}1 & 0\leqq t\leqq L-u\\ -\dfrac{1}{2u}t+\dfrac{L+u}{2u} & L-u\leqq t\leqq L+u\end{cases}$$

ここで平均寿命$\tilde{L}\equiv\sum_{t=0}^{L+u}p(t)$は$L$に等しい。彼の資産保有のライフ・サイクルを考えてみよう。彼の問題は，期待生涯予算制約式（ただし生涯所得は確定している）を満足しながら期待生涯効用を最大化することである。

$$(3\text{-}2)\qquad \begin{aligned}&\max\sum_{t=0}^{L+u}p(t)u(C_t)\\ &\text{subject to }\sum_{t=0}^{L+u}p(t)C_t=wL\end{aligned}$$

最大化の1階の条件より

$$C_1=C_2=\cdots\cdots=C_{L+u}$$

を得る。つまり各期の最適消費は生涯の全期間にわたって等しく，

$$(3\text{-}3)\qquad C^*=\frac{R}{L}w$$

となる。従って，t歳時の貯蓄残高$S(t)$は，勤労期間，退職後のそれぞれについて

$$(3\text{-}4)\qquad S(t)=\begin{cases}g(t)=w\left(1-\dfrac{R}{L}\right)t & 0\leqq t\leqq R\\ h(t)=wR\left(1-\dfrac{t}{L}\right) & R\leqq t\leqq L+u\end{cases}$$

を得る（400～405行）。また金融政策の場合には

$$(2\text{-}23)\quad \frac{dB}{dM^a}=\frac{-1}{|D(0)|}s^a A_a B_e[I_b^b L_1^b+s^b L_2^b]>0$$

となり（407～411行），両政策は経常収支に対して逆向きの効果を持つことが分かる。

414行の SHOWTIME は実行時間を計測する命令であり，本節の5×5行列の計算にはパソコンで41秒かかったことが示されている（417行）[5]。

3. 寿命不確実性の下での資産分配：応用例2

これまで計算量が厖大になるため敬遠されてきた問題への REDUCE の適用例として，人々の寿命の長さが違うことを考慮した場合の資産分配の不平等性尺度（Gini 係数）を計算してみよう。

この問題を考える動機は，年齢（ライフ・ステージ）の異なる多くの人々から構成されている社会において「平等」な資産分配はどのようなものであろうか，老いも若きも同じ大きさの資産を持つ状態よりもむしろ年齢の違いを反映した資産保有の大小のある状態の方が「平等」と言えないだろうかということにある[6]。換言すれば，もし仮りに全員が同じ大きさの資産を持つならば Gini 係数は 0 と計算されるが，Gini 係数＝0 となる分配が果して「平等」な分配と主張できるのであろうか。本節では，相続を含めた初期賦存，労働期間，賃金率，選好など誕生日を除くあらゆる特性について同じである人々（したがってある時点において年齢の異なる人々）により構成される社会を想定する。このような社会においてもこ資産分配が不平等である（Gini 係数が 0 ではない）とすれば，それは人々の年齢の相違に基

5) 使用機種 PC 9801vm，10MHz。ただし，PC 9800シリーズでは内部タイマーが1秒単位でしか動作しないため誤差は非常に大きく，計測された実行時間の信頼性は低い。なお，バージョン 3.3 の計算時間は43秒，大型機（東大大型機センター日立M-680H）では 747 ミリ秒であった。

6) 詳しくは小平（1984）を見よ。

$$(2\text{-}14)\quad \frac{dY^b}{dG^a}=\frac{-1}{|D(0)|}L_1^aL_2^bA_aB_ee*>0$$

$$(2\text{-}15)\quad \frac{dr^a}{dG^a}=\frac{1}{|D(0)|}B_eL_1^a\{(I_b^b-A_be*)L_1^b+s^bL_2^b\}>0$$

$$(2\text{-}16)\quad \frac{dr^b}{dG^a}=\frac{1}{|D(0)|}L_1^aL_2^bA_aB_ee*<0$$

を得る。為替レートへの効果は，de/dG^a の符号が定まらないという意味で不明である。

同様に金融政策の効果を調べたのが361～397行で，結果をまとめると

$$(2\text{-}17)\quad \frac{dY^a}{dM^a}=\frac{-1}{|D(0)|}B_e\{A^aI_b^bL_1^b+(A_a+I_a^a)s^bL_2^b+(I_b^b-A_be*)I_a^aL_1^b)\}>0$$

$$(2\text{-}18)\quad \frac{dY^b}{dM^a}=\frac{1}{|D(0)|}s^aL_b^2A_aB_ee*<0$$

$$(2\text{-}19)\quad \frac{dr^a}{dM^a}=\frac{1}{|D(0)|}s^aB_e\{(A_be*-I_b^b)L_1^b-s^bL_2^b\}<0$$

$$(2\text{-}20)\quad \frac{dr^b}{dM^a}=\frac{-1}{|D(0)|}s^aL_1^bA_aB_ee*<0$$

$$(2\text{-}21)\quad \frac{de}{dM^a}=\frac{1}{|D(0)|}\{A_a[B_a(I_b^bL_1^b+s^bL_2^b)-s^a(L_2^bB_be*+I_b^bL_1^b+s^bL_2^b)]+I_a^aB_a[(I_b^b-A_be*)L_1^b+s^bL_2^b]\}<0$$

を得る。

最後に経常収支Bへの効果を調べてみよう。(2-5) より

$$\frac{dB}{dG^a}=\frac{dA}{dG^a}=A_a\frac{dr^a}{dG^a}+A_b\frac{dr^b}{dG^a}$$

であるから (2-15)，(2-16) を利用して計算すると

$$(2\text{-}22)\quad \frac{dB}{dG^a}=\frac{1}{|D(0)|}L_1^aA_aB_e[I_b^bL_1^b+s^bL_2^b]<0$$

ばれるが，代入文では「＝」(イコール) ではなく「：＝」(コロン，イコール) を用いる。また22行は「＄」(ドル記号) で終了しているが，

＄　計算は実行するが，結果は出力しない

；　計算を実行して，結果を出力する

という違いがある。ここは定義だけで代入も展開もしておらず同じものが出力されるだけであるので，煩しさを避けるために「＄」で終了した。25〜97行で各成分に多項式を代入している。なお為替レート e は，自然対数の底 e（予約変数）との混合を避けるため，ex に書換えてある。

次の154〜213行は $D(0)$ の定義である。仮定 (2-12) に影響されるのは $D(B^*)$ の (3,5) 成分だけである。SUB 演算子を用いて d35 の b の値に 0 を代入している (159行)。これは，ある変数に特定の値（ないしは式）を代入した時の関数の値（式）を求める機能を持ち

SUB（〈変数〉＝〈値〉，〈関数〉）

の形で使用する。162〜213行で行列 $D(0)$ の成分を出力している。この行列式の計算は DET 命令を用いて216〜223行で行われている。

DET（〈行列名〉）

の形で用いる。また逆行列は 227 行にあるように

〈行列名〉**(−1)

で求められる。227行に定義した gyaku の計算結果は230〜298行に出力されている。

以上で準備がととのった。まず政策変数の列ベクトルを夫々 fis, mon として定義する (302〜309行)。また内生変数に対する効果を表わす列ベクトル f と g も用意する (313〜320行)。例えば f の第 1 成分 f1 は dY^a/dG^a を表わす。財政々策の効果は324〜358行で計算されている。これに符号に関する仮定 (2-6)，(2-9) を代入し整理すると

$$(2\text{-}13)\quad \frac{dY^a}{dG^a}=\frac{1}{|D(0)|}L_2^a B_e\{(A_b e*-I_b^b)L_1^b-s^b L_2^b\}>0$$

はファイル入力命令 IN を用いて予め作成しておいたデータセット OMM.RED を読込ませ実行させることにする（8行目)。IN 命令はファイル名を「”」（ダブルクォーテイション）で閉み,

IN␣“〈ファイル名〉”;

として用いる。入力行の最後は「；」(セミコロン）で終了する。(「$」(ドル記号）でも良い。後出）画面には読込まれたファイルの内容とそれに対する REDUCE の処理結果が交互に表示される（9行目以降)。REDUCE はファイルの最後（419行）に書かれた

END;

という文を読込みファイルの終りを検出し，次の入力促進記号を表示してキーボードからのコマンドを受付ける状態となる（421行)。

9行のように「%」(パーセント記号）で始まる行は注釈行であり，%からその行の終りまでは無視される。

18行の MATRIX はその後に書かれた変数が行列名であることを宣言し，21〜22行の MAT でその行列の成分の並び方を定義する。

MATRIX␣〈行列名〉(〈行数〉,〈列数〉)

〈行列名〉：=MAT（〈第1行の並び〉,……)

の形で用いる。勿論，行列は正方行列でなくても良い。ここでは5×5の行列を3つ準備している。db は（2-8）の $D(B^*)$ に，d0 は仮定（2-12）により $B^*=0$ とおいた行列 $D(0)$ に，gyaku は $|D(0)|D^{-1}(0)$ に対応するものである。そして21〜22行では MAT 命令を用い，db の成分が

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d11}, & \mathrm{d12}, & \mathrm{d13}, & \mathrm{d14}, & \mathrm{d15} \\ \mathrm{d21}, & \mathrm{d22}, & \mathrm{d23}, & \mathrm{d24}, & \mathrm{d25} \\ \mathrm{d31}, & \mathrm{d32}, & \mathrm{d33}, & \mathrm{d34}, & \mathrm{d35} \\ \mathrm{d41}, & \mathrm{d42}, & \mathrm{d43}, & \mathrm{d44}, & \mathrm{d45} \\ \mathrm{d51}, & \mathrm{d52}, & \mathrm{d53}, & \mathrm{d54}, & \mathrm{d55} \end{bmatrix}$$

という形に並んでいることを指示している。一行に書ききれない場合はこのように複数行にわたることも許される（255文字まで)。これは代入文と呼

```
F5 := AA*BB*EX*LA1*LB2 + AA*IBB*LA1*LB1 + AA*LA1*LB2*SB - AB*BA*EX*LA2*LB1

       + BA*IBB*LA2*LB1 + BA*LA2*LB2*SB

%
%monetary policy;
m:=gyaku*mon$


%m -> ya;
m1:=m(1,1)/dma;


M1 := BE*( - AA*IBB*LB1 - AA*LB2*SB + AB*EX*IAA*LB1 - IAA*IBB*LB1 - IAA*

          LB2*SB)

%m -> yb;
m2:=m(2,1)/dma;


M2 := AA*BE*EX*LB2*SA

%m -> ra;
m3:=m(3,1)/dma;


M3 := BE*SA*(AB*EX*LB1 - IBB*LB1 - LB2*SB)

%m -> rb;
m4:=m(4,1)/dma;


M4 :=  - AA*BE*EX*LB1*SA

%m -> ex;
m5:=m(5,1)/dma;


M5 := AA*BA*IBB*LB1 + AA*BA*LB2*SB - AA*BB*EX*LB2*SA - AA*IBB*LB1*SA - AA*

      LB2*SA*SB - AB*BA*EX*IAA*LB1 + BA*IAA*IBB*LB1 + BA*IAA*LB2*SB

%
%effects on trade balance;
%fiscal policy;
aa*f3+ab*(-lb1/lb2)*f2;


AA*BE*LA1*(IBB*LB1 + LB2*SB)

%monetary policy;
aa*m3+ab*(-lb1/lb2)*m2;


 - (AA*BE*SA)*(IBB*LB1 + LB2*SB)

%
showtime;


TIME: 41000 MS

end;

2:
```

```
GYAKU(5,3) := AA*BB*LA1*LB2 - AB*BA*LA2*LB1 + AB*IAA*LA1*LB1 + AB*LA2*LB1*

              SA + BB*IAA*LA1*LB2 + BB*LA2*LB2*SA

GYAKU(5,4) := AA*BB*IBB*LA1 + AB*BA*LA2*SB - AB*BB*EX*IAA*LA1 - AB*BB*EX*

              LA2*SA - AB*IAA*LA1*SB - AB*LA2*SA*SB + BB*IAA*IBB*LA1 + BB*

              IBB*LA2*SA

GYAKU(5,5) := BA*IBB*LA2*LB1 + BA*LA2*LB2*SB - BB*EX*IAA*LA1*LB2 - BB*EX*

              LA2*LB2*SA - IAA*IBB*LA1*LB1 - IAA*LA1*LB2*SB - IBB*LA2*LB1*

              SA - LA2*LB2*SA*SB


%
%policy instruments (5x1 column vector);
matrix fis(5,1),mon(5,1);


fis:=mat((dga),(0),(0),(0),(0))$


mon:=mat((0),(dma),(0),(0),(0))$


%
%effects on ya, yb, ra, rb, ex (5x1 column vector);
matrix f(5,1),m(5,1);


f:=mat((f1),(f2),(f3),(f4),(f5))$


m:=mat((m1),(m2),(m3),(m4),(m5))$


%
%fiscal policy;
f:=gyaku*fis$


%f -> ya;
f1:=f(1,1)/dga;


F1 := BE*LA2*(AB*EX*LB1 - IBB*LB1 - LB2*SB)

%f -> yb;
f2:=f(2,1)/dga;


F2 :=  - AA*BE*EX*LA1*LB2

%f -> ra;
f3:=f(3,1)/dga;


F3 := BE*LA1*( - AB*EX*LB1 + IBB*LB1 + LB2*SB)

%f -> rb;
f4:=f(4,1)/dga;


F4 := AA*BE*EX*LA1*LB1

%f -> ex;
f5:=f(5,1)/dga;
```

```
D0(5,5) := BE

delta:=det(d0);

DELTA := BE*( - AA*IBB*LA1*LB1 - AA*LA1*LB2*SB + AB*EX*IAA*LA1*LB1 + AB*EX
             *LA2*LB1*SA - IAA*IBB*LA1*LB1 - IAA*LA1*LB2*SB - IBB*LA2*LB1*
             SA - LA2*LB2*SA*SB)
%note delta is positive;
%gyaku=(det of d0)*(inverse of d0);
gyaku:=d0**(-1)*delta;

GYAKU(1,1) := BE*LA2*(AB*EX*LB1 - IBB*LB1 - LB2*SB)
GYAKU(1,2) := BE*( - AA*IBB*LB1 - AA*LB2*SB + AB*EX*IAA*LB1 - IAA*IBB*LB1
                   - IAA*LB2*SB)
GYAKU(1,3) := AB*BE*LA2*LB1
GYAKU(1,4) :=  - AB*BE*LA2*SB
GYAKU(1,5) :=  - (BE*LA2)*(IBB*LB1 + LB2*SB)
GYAKU(2,1) :=  - AA*BE*EX*LA1*LB2
GYAKU(2,2) := AA*BE*EX*LB2*SA
GYAKU(2,3) :=  - (BE*LB2)*(AA*LA1 + IAA*LA1 + LA2*SA)
GYAKU(2,4) := BE*( - AA*IBB*LA1 + AB*EX*IAA*LA1 + AB*EX*LA2*SA - IAA*IBB*
                  LA1 - IBB*LA2*SA)
GYAKU(2,5) := BE*EX*LB2*(IAA*LA1 + LA2*SA)
GYAKU(3,1) := BE*LA1*( - AB*EX*LB1 + IBB*LB1 + LB2*SB)
GYAKU(3,2) := BE*SA*(AB*EX*LB1 - IBB*LB1 - LB2*SB)
GYAKU(3,3) :=  - AB*BE*LA1*LB1
GYAKU(3,4) := AB*BE*LA1*SB
GYAKU(3,5) := BE*LA1*(IBB*LB1 + LB2*SB)
GYAKU(4,1) := AA*BE*EX*LA1*LB1
GYAKU(4,2) :=  - AA*BE*EX*LB1*SA
GYAKU(4,3) := BE*LB1*(AA*LA1 + IAA*LA1 + LA2*SA)
GYAKU(4,4) :=  - (BE*SB)*(AA*LA1 + IAA*LA1 + LA2*SA)
GYAKU(4,5) :=  - (BE*EX*LB1)*(IAA*LA1 + LA2*SA)
GYAKU(5,1) := AA*BB*EX*LA1*LB2 + AA*IBB*LA1*LB1 + AA*LA1*LB2*SB - AB*BA*EX
              *LA2*LB1 + BA*IBB*LA2*LB1 + BA*LA2*LB2*SB
GYAKU(5,2) := AA*BA*IBB*LB1 + AA*BA*LB2*SB - AA*BB*EX*LB2*SA - AA*IBB*LB1*
              SA - AA*LB2*SA*SB - AB*BA*EX*IAA*LB1 + BA*IAA*IBB*LB1 + BA*
              IAA*LB2*SB
```

```
DB(4,5) := 0

DB(5,1) := BA

DB(5,2) := BB

DB(5,3) :=  - AA

DB(5,4) :=  - AB

DB(5,5) := BE


%assume trade account is in balance;
d0:=mat((d11,d12,d13,d14,d15),(d21,d22,d23,d24,d25),(d31,d32,d33,d34,d035),
        (d41,d42,d43,d44,d45),(d51,d52,d53,d54,d55))$


d035:=sub(b=0,d35)$


d0:=d0;


D0(1,1) :=  - BA + SA

D0(1,2) :=  - BB

D0(1,3) :=  - IAA

D0(1,4) := 0

D0(1,5) :=  - BE

D0(2,1) := LA1

D0(2,2) := 0

D0(2,3) := LA2

D0(2,4) := 0

D0(2,5) := 0

D0(3,1) := BA*EX

D0(3,2) := BB*EX + SB

D0(3,3) := 0

D0(3,4) :=  - IBB

D0(3,5) := BE*EX

D0(4,1) := 0

D0(4,2) := LB1

D0(4,3) := 0

D0(4,4) := LB2

D0(4,5) := 0

D0(5,1) := BA

D0(5,2) := BB

D0(5,3) :=  - AA

D0(5,4) :=  - AB
```

```
d41:=0$
d42:=lb1$
d43:=0$
d44:=lb2$
d45:=0$
d51:=ba$
d52:=bb$
d53:=-aa$
d54:=-ab$
d55:=be$
db:=db;
DB(1,1) :=  - BA + SA
DB(1,2) :=  - BB
DB(1,3) :=  - IAA
DB(1,4) := 0
DB(1,5) :=  - BE
DB(2,1) := LA1
DB(2,2) := 0
DB(2,3) := LA2
DB(2,4) := 0
DB(2,5) := 0
DB(3,1) := BA*EX
DB(3,2) := BB*EX + SB
DB(3,3) := 0
DB(3,4) :=  - IBB
DB(3,5) := BE*EX + B
DB(4,1) := 0
DB(4,2) := LB1
DB(4,3) := 0
DB(4,4) := LB2
```

表2—1

```
StaffLISP/86  Ver. 3.2   Copyright (c) 1987 B U G, Inc.
REDUCE        Ver. 3.2   Copyright (c) 1985 The Rand Corporation

Start time = Sep. 22 1987 (Tue) 21:10:26

REDUCE 3.2, 15-Apr-85 ...

1: in "b:omm.red";
%open macro model of flexible exchange rate system;
%                 (5x5 model);
%                                            september 1987;
%model;
%on time;
on gcd;


%5x5 matrix;
matrix db(5,5),d0(5,5),gyaku(5,5);


db:=mat((d11,d12,d13,d14,d15),(d21,d22,d23,d24,d25),(d31,d32,d33,d34,d35),
        (d41,d42,d43,d44,d45),(d51,d52,d53,d54,d55))$


d11:=sa-ba$


d12:=-bb$


d13:=-iaa$


d14:=0$


d15:=-be$


d21:=la1$


d22:=0$


d23:=la2$


d24:=0$


d25:=0$


d31:=ex*ba$


d32:=ex*bb+sb$


d33:=0$


d34:=-ibb$


d35:=ex*be+b$


```

ただし

$$s^j \equiv \left(1 - \frac{dC^j}{dY^j}\right) > 0 \qquad I^j_j \equiv \frac{\partial I^j}{\partial r^j} < 0$$

(2-9)

$$L^j_1 \equiv \frac{\partial L^j}{\partial Y^j} > 0 \qquad L^j_2 \equiv \frac{\partial L^j}{\partial r^j} < 0$$

体系（2-7）を利用して，例えば a 国の財政々策の効果を分析するには

(2-10)　$dG^a > 0 = dM^a = dG^b = dM^b$

とおいて，(2-7) の両辺に左側から行列 $D(B^*)$ の逆行列を掛け符号を調べれば良い。また金融政策の効果は

(2-11)　$dM^a > 0 = dG^a = dG^b = dM^b$

とおいて同様の繰作をすれば良い。その際行列式 $|D(B^*)|$ の符号が定まっていることが必要であるが，残念ながらこのままでは定まらない。そこで

(2-12)　$B^* = 0$

と仮定し，経常収支がバランスしている状態の近傍で分析を続けよう。

表2-1は REDUCE による計算過程である。大型機用とは違いパソコン用 REDUCE は大文字，小文字を区別せず全て大文字として扱うので，表2-1 では入力を小文字で，出力を大文字で表わし識別を容易にしている。また左欄の数字は説明の便宜のため付けた行番号であり，REDUCE の実行には無関係である。REDUCE を起動すると版権に関するメッセージ（1～4行）に続いて画面は

```
REDUCE␣3.2,␣15-Apr-85␣...
1:
```

となり入力待ちとなる。数字（ここでは1）に「：」(コロン)を伴ったものは入力促進記号である。対話形式でも REDUCE は利用できるが，ここで

いるのに対して，吹春は代入によって両国の利子率を消去した3変数の体系を再構成している（筆算の限界？）。

デルは所得 Y^a, Y^b, 利子率 r^a, r^b, 為替レート e（例えば\$1$=e$円）の5変数をもつ次の連立方程式体系によって表わされる[4]。

(2-1) $Y^a=C^a(Y^a)+I^a(r^a)+G^a+B(Y^a,\ Y^b,\ e)$

(2-2) $M^a=L^a(Y^a,\ r^a)$

(2-3) $Y^b=C^b(Y^b)+I^b(r^b)+G^b-eB(Y^a,\ Y^b,\ e)$

(2-4) $M^b=L^b(Y^b,\ r^b)$

(2-5) $B(Y^a,\ Y^b,\ e)=A(r^a,\ r^b)$

ここに，C^j は j 国の消費関数，I^j は投資関数，L^j は貨幣需要関数であり，Bは経常収支，$-A$ は長期資本収支である。また政策変数は財政支出 G^j と貨幣供給量 M^j である。肩付きの添字 $j=a,\ b$ は国を表わす。（偏）導関数の符号については通常の仮定に加えて，

$$B_a\equiv\frac{\partial B}{\partial Y^a}<0,\quad B_b\equiv\frac{\partial B}{\partial Y^b}>0,\quad B_e\equiv\frac{\partial B}{\partial e}<0$$

(2-6)

$$A_a\equiv\frac{\partial A}{\partial Y^a}<0,\quad A_b\equiv\frac{\partial A}{\partial Y^b}>0$$

と仮定する。次に，(2-1)—(2-5) の全微分をとり整理して，

$$\text{(2-7)}\qquad D(B^*)\begin{bmatrix} dY^a \\ dY^b \\ dr^a \\ dr^b \\ de \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} dG^a \\ dM^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る。ここに $D(B^*)$ は次のような5×5行列である。

$$\text{(2-8)}\qquad D(B^*)=\begin{bmatrix} s^a-B_a & -B_b & -I^a_a & 0 & -B_e \\ L^a_1 & 0 & L^a_2 & 0 & 0 \\ eB_a & eB_e+s^b & 0 & -I^b_b & B+eB_e \\ 0 & L^b_1 & 0 & L^b_2 & 0 \\ B_a & B_b & -A_a & -A_b & B_e \end{bmatrix}$$

4) 吹春（1985）のモデルと同一である。われわれは5変数のまま分析を進めて

デルを作り，それをもとにして経済の中で起ることを理解するという方法を採らざるを得ない。このようなモデル分析は，文章的な展開によって勿論行うこともできるが，複数の要因の相互関係や影響力の違いなどを明快に説明するには数学を利用するのが便利である。分析道具に数学を用いる経済学は広い意味で数理経済学と呼ぶことができようが，一口に数理経済学といっても代数的に連立方程式を解くもの，関数の最大値，最小値を求めるもの，微分方程式を解くもの，行列を利用するもの，位相数学により不動点の存在を示すものから，最近は現代数学風に論理展開をするもの迄さまざまであり，利用される数学も徐々に高度化している。

このように現代数学風数理経済学が流行るようになった理由の1つに古典力学的数理経済学では次第に見通しが悪くなってきたことが挙げられ，その原因のかなりの部分を数式の繁雑な代入，展開，消去，約分，因数分解が占めていたと考えられる。とすれば計算機による数式処理が可能になり，それが身近かに利用できるようになった今日の段階でもう一度古典力学的数理経済学を振りかえってみることにも価値があろう。特にかつては計算量が厖大になるため敬遠されたり廻り道を余儀なくされていたような問題を扱ってみることは興味深いし，新らたな展望が開ける可能性が期待される。

2. オープン・マクロ・モデル：応用例1

行列の積や行列式を計算したり逆行列を求めることは経済学では頻繁に行われるが，元の行列が大きくなるにつれて急速に手間が増すものである。本節では簡単な変動相場制のモデルを構成し，REDUCE による行列の計算について紹介する。

a，b 2国からなる世界を考え，a国の経済政策が両国の所得水準や利子率，為替レートに及ぼす影響を分析しよう。単純化のために(i)為替レートは瞬時に調整される，(ii)両国の物価水準は不変であると仮定すると，モ

4.　解析的な微分，積分

5.　記号行列の計算

6.　任意多倍長整数および実数の演算

7.　方程式の解の導出

などが挙げられ，かなり強力な計算能力を持つことが分かる。

しかし REDUCE は高級言語 LISP をベースに記述されているので大容量のメモリを使用する。このことは，計算時間も数値計算に比べて長くなること，したがって高性能な CPU を必要とすることを意味する。これらの事情もあって，日本では昭和50年代から共同利用施設である各地の大型計算機センターを中心に普及した。本学の計算機センターは REDUCE を備えていない。しかし1987年3月末より N-1ネットに加入したので，われわれは DDX パケット交換網を通じて東京大学大型計算機センターを（そして，REDUCE を）身近かに利用可能になった[2]。他方，最近の半導体技術の目ざましい進歩と，メモリ使用効率の良いソフトウェア技術の発展とによって REDUCE はパソコンでも利用できるようになった[3]。

さて，経済学は社会の直面するさまざまな経済現象や課題（病気に例えれば症状）に関して正確な理解（診断）を持ち望しい政策（処方箋）を見つけだすことを目指している。しかし，いざ経済学を現実の問題に適用しようとすると，すべての自然現象や社会現象がそうであるように経済現象も非常に複雑であり，経済学の直接的な適用はしばしば困難である。そこで現実の問題の中から基本的要因を幾つか取出して現実の経済を単純化したモ

---

2)　N-1ネット加入以前も音響カプラ（ないしはモデム）を用意すれば公衆回線（普通の電話回線）経由で東大大型計算機センターを利用することはできた。しかし N-1 方式に比べると公衆回線経由の通信は非常に低速であり（300～2400ボー対9600ボー）またしばしば断線するので不便である。

REDUCE 以外にも例えば統計パッケージ SAS など東大大型計算機センターには有用なプログラムが多い。

3)　特に PC 9800シリーズ（日本電気製）向けの REDUCE on PC（(株)ビー・ユー・ジー）の発表は，同機種の普及度を考えるとユーザーにとってメリットが大きい。本稿でパソコン用 REDUCE と言う場合これを指す。

研究ノート

経済分析と REDUCE*

小平　裕

1. はじめに

本稿の目的は，最近身近かに利用可能になった計算機による数式処理プログラム REDUCE の経済学への応用を紹介することである。

数式処理とは例えば「sin x を微分せよ」という入力命令に対して「cos x」という結果を出力するような情報処理のことであり，従来の数値計算とは全く異なる計算機の利用形態である。これ迄に開発されたシステムは，特定の目的のために特定の機種の上でアセンブラで書かれたものまで含めると数十にのぼると言われている。しかしそのうち広く利用されているのは REDUCE, MACSYMA, muMATH など比較的少数にとどまる。なかでも，1967年頃から Utah 大学の Hearn 教授（現在 Rand 社）が開発を始めたシステム REDUCE は，各種の計算機への移植が容易でありまた処理できる対象も広いので，ユーザー・サイドから見て実際に入手，利用する面で他のシステムより優れていると言えよう[1)]。これの特徴的な機能としては

1. 多変数多項式，有理関数の展開や項の並べかえ
2. 分数式の通分，約分などの式の数理
3. 多項式の因数分解

* 本稿は成城大学学長特別研究助成を受けた研究成果の一部である。本学計算機センターのN-1ネット加入に際して多くの方々の御理解と御尽力がありました。また計算機の利用については計算機センターの槇守さん，中郷孝子さんに御手伝いいただきました。あわせて感謝したいと思います。

1) 実際，広く普及している。現在配布されているのはバージョン 3.3 であるが，本稿ではバージョン 3.2 を使用した。