

## 2 線形部分空間がなす角

関 本 年 彦

記号等の説明  $\mathbf{R}$  は実数集合,  $\mathbf{R}^n$  は  $n$  次元ユークリッド空間でその要素は列ベクトルであるとする。すなわち,  $x \in \mathbf{R}^n$  は

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \xi_i \in \mathbf{R}$$

のようなベクトルであるとする。さらに,  $\mathbf{R}^{m \times n}$  は  $m \times n$  行列の集合を表す。行列  $A$  の転置行列を  $'A$  と記すことにするが, この記法を用いれば  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  である。 $i$  番目の要素が 1 で他の要素はすべて 0 であるようなベクトルを  $e_i$  とするとき,  $(e_1, \dots, e_n)$  を  $\mathbf{R}^n$  の自然基底という。 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$  に対して, その内積は  $'xy = \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n$  で定義され, これを  $\langle x, y \rangle$  と記す。 $\sqrt{\langle x, x \rangle}$  を  $x$  のノルムといい,  $\|x\|$  と記す<sup>1)</sup>。

### § 1 線形写像と行列のノルム

定義 1. 1 線形写像  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  のノルム  $\|f\|$ , および, 最小ノルム  $\mu(f)$  を,

$$\|f\| = \max\{\|fx\| : x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\},$$

$$\mu(f) = \min\{\|fx\| : x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\}$$

と定義する。

定義 1. 2 行列  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  のノルム  $\|A\|$ , および, 最小ノルム  $\mu(A)$  を

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| : x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\},$$

---

1) 次元を明確にするために,  $\|x\|_n$  などと記せばよいのであるが, 通常は前後の関係から混同の恐れはないのでこのように記すことにする。

2 線形部分空間がなす角

$$\mu(A) = \min\{\|Ax\| : x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\}$$

と定義する。

線形写像  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  を  $\mathbf{R}^n$  および  $\mathbf{R}^m$  の自然基底によって表す行列を  $A$  とすると,  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して  $fx = Ax$  であるから  $\|fx\| = \|Ax\|$ , したがって  $\|f\| = \|A\|$  である。さらに下記の (1. 7) を用いれば,  $A$  を  $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  の任意の正規直交基底に関して線形写像  $f$  を表現する行列としたときも  $\|f\| = \|A\|$  であることがわかる。

ノルムと最小ノルムの諸性質：以下では  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  とする。(1. 1)~(1. 3),

(1. 4) については,  $A$  を線形写像  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  に置き換えても成り立つ。

(1. 1)  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \mu(A)\|x\| \leq \|Ax\| \quad (x \in \mathbf{R}^n).$

(1. 2)  $\|A\| = \max\{\langle y, Ax \rangle : x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m, \|x\| = 1, \|y\| = 1\}.$

(1. 3)  $\|A'\| = \|A\|.$

(1. 3')  $A$  が正方行列のとき,  $\mu({}^t A) = \mu(A).$

(1. 3'')  $\mathbf{R}^n$  上の線形変換  $f$  に対して,  $\mu({}^t f) = \mu(f).$

(1. 4)  $\|A'A\| = \|{}^t AA\| = \|A\|^2.$

(1. 5)  $A$  が正則行列のとき,  $\mu(A^{-1})\|A\| = 1.$

(1. 5')  $f$  が線形同形のとき,  $\mu(f^{-1})\|f\| = 1.$

(1. 6) 正方行列  $A$  に対して,  $\mu(A) \neq 0$  は  $A$  が正則であるための必要十分条件である。

(1. 6')  $\mathbf{R}^n$  上の線形変換  $f$  に対して,  $\mu(f) \neq 0$  は  $f$  が線形同形であるための必要十分条件である。

(1. 7) 行列  $P \in \mathbf{R}^{l \times m}$  の列ベクトルがたがいに直交する単位ベクトルであるとき,

$$\|PAx\| = \|Ax\| \quad (x \in \mathbf{R}^n), \quad \|A'P\| = \|A\|.$$

(1. 8) 行列  $P$  が正射影<sup>2)</sup>を表す行列であるとき,  $\|Px\| \leq \|x\|$  であり, 等

## 2 線形部分空間がなす角

号が成り立つのは  $Px=x$  のときにかぎる。

(1. 8')  $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  が正射影ならば,  $\|px\| \leq \|x\| (x \in \mathbf{R}^n)$  であり, 等号が成り立つのは  $px=x$  のときにかぎる。

証明 (1. 1): ノルムおよび最小ノルムの定義から直ちに得られる。

(1. 2):  $\langle y, Ax \rangle \leq \|y\| \|Ax\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ .  $x$  を  $\|Ax\| = \|A\|$  であるような単位ベクトルとし,  $y$  として  $Ax/\|Ax\|$  をとると  $\langle Ax/\|Ax\|, Ax \rangle = \|Ax\| = \|A\|$ .

(1. 3): (1. 2) を用いると,  $\|A\| = \max\{\langle y, Ax \rangle : x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m, \|x\| = 1, \|y\| = 1\} = \max\{\langle Ay, x \rangle : x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m, \|x\| = 1, \|y\| = 1\} = \|A\|$ .

(1. 3'): 特異値分解を用いることによりこの等式が得られる。

(1. 4):  $\|A'A\| \leq \|A\| \|A\| = \|A\|^2$ , 一方  $\|A'A\| \geq \langle x, A'Ax \rangle = \|Ax\|^2$ .

(1. 5):  $x$  を単位ベクトルとすると,  $1 = \|A^{-1}Ax\| \geq \mu(A^{-1}) \|Ax\|$  より  $1 \geq \mu(A^{-1}) \|A\|$ . 一方, 任意の単位ベクトル  $x$  に対して  $1 = \|AA^{-1}x\| \leq \|A\| \|A^{-1}x\|$  より  $1 \leq \|A\| \mu(A^{-1})$ .

(1. 6):  $\mu(A) \neq 0$  のとき,  $Ax=0$  を仮定すると  $\mu(A) \|x\| \leq \|Ax\| = 0$  であるから  $x=0$  である。すなわち,  $A$  は単射である。 $m=n$  だから  $A$  が単射ならば全射でもある。逆に,  $A$  が正則であるとする, (1. 5) から  $\mu(A) \|A^{-1}\| = 1$ , したがって  $\mu(A) \neq 0$ 。

(1. 7): 最初の等式については,  $\|Px\| = \|x\|$  を示せば十分であるが,  $P$  の列ベクトルを  $p_1, \dots, p_n$  とし  $x = (x_1, \dots, x_n)$  とすると  $\|Px\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ . 次に, この結果と (1. 3) を用いると  $\|A'P\| = \|P'A\| = \|A\| = \|A\|$ 。

(1. 8):  $x = Px + (I-P)x$  と  $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$  を用いて,

$(I-P)x=0$  を得る。 ◇

2) 射影, すなわち,  $f^2=f$  を満たす線形変換のうち  $f=f'$  であるものを正射影 (または直交射影) (orthogonal projection) という。一般の射影を斜交射影 (oblique projection) ということもある。

## § 2 CS 分解

定理 2.1 (CS 分解)

$$W = \begin{matrix} r & n-r \\ n-r & \end{matrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}, \quad 2r \leq n$$

を直交行列とすると,

$${}^tUWV = \begin{matrix} r & r & n-2r \\ r & \Gamma & -\Sigma & 0 \\ n-2r & \Sigma & \Gamma & 0 \\ & 0 & 0 & I \end{matrix}$$

とするような直交行列  $U = U_1 \oplus U_2$ ,  $V = V_1 \oplus V_2$  が存在する。ここで,

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_r), \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r), \quad \gamma_i, \sigma_i \geq 0 (1 \leq i \leq r), \\ \Gamma^2 + \Sigma^2 = I,$$

である<sup>3)</sup>。

定理の証明  $W_{11} = U_1 \Gamma V_1$ , ( $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ ,  $0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_r$ ) を  $W_{11}$  の特異値分解とすると,

$$I_r = \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix} V_1 \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix} V_1 = {}^tV_1 W_{11} W_{11} V_1 + {}^tV_1 W_{21} W_{21} V_1 = \Gamma^2 + {}^tV_1 W_{21} W_{21} V_1$$

である。この式から  ${}^tV_1 W_{21} W_{21} V_1 = I_r - \Gamma^2$  でこれは対角行列であり, したがって  $(n-r) \times r$  行列  $W_{21} V_1$  の各列ベクトル  $c_1, \dots, c_r$  はたがいに直交しなければならない。そこで,  $d_i = \varepsilon_i c_i / \|c_i\|$  ( $\varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq r$ ) とおき, さらに単位ベクトル  $d_j (r+1 \leq j \leq n-r)$  をつけ加えて全体が正規直交系となるようにすると,  $\hat{U}_2 = (d_1, \dots, d_{n-r})$  とおくことにより

$${}^t\hat{U}_2 W_{21} V_1 = \begin{matrix} r \\ n-2r \end{matrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) (\sigma_i \geq 0)$$

3)  $A \oplus B$  は, 行列  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  を表す。ただし,  $A, B$  は正方行列。また,

$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  は, 対角行列  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k \end{pmatrix}$  を表す。 $I_r$  は  $r$  次単位行列。

2 線形部分空間がなす角

である。なお、 $\varepsilon_i$  は  $\sigma_i \geq 0$  であるように定める。さらに、行列

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルは正規直交系をなすから、

$$(2.1) \quad r_i^2 + \sigma_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq r)$$

が成り立つ。次に、等式

$$\begin{aligned} I_r &= (U_1 W_{11} U_1 W_{12}) \begin{pmatrix} W_{11} U_1 \\ W_{12} U_1 \end{pmatrix} = U_1 W_{11} W_{11} U_1 + U_1 W_{12} W_{12} U_1 \\ &= \Gamma^2 + U_1 W_{12} W_{12} U_1 \end{aligned}$$

を考えると、上と同様に  $r \times (n-r)$  行列  $U_1 W_{12}$  の行ベクトルはたがいに直交することがわかる。これらの行ベクトルを正規化したものに適当な単位ベクトルを付け加えたものを列ベクトルとする直交行列を  $V_2$  とすると、

$$U_1 W_{12} V_2 = (T \ 0), \quad T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_r) \quad (\tau_i \leq 0)$$

とすることができる。ただし、 $\tau_i \leq 0$  となるように必要があれば  $V_2$  の列ベクトルに  $-1$  を乗じておく。したがって

$$U_1 (W_{11} W_{12}) \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} = (\Gamma \ T \ 0)$$

が成り立つ。この行列の行ベクトルはたがいに直交するから  $r_i^2 + \tau_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq r)$  であり、(2.1) と合わせて

$$T = -\Sigma$$

を得る。ここで、 $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k < r_{k+1} = \dots = r_r = 1$  を仮定すると、

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} W_{12} \\ W_{21} W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & r-k & k & r-k & n-2r \\ \Gamma_1 & 0 & -\Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{l-k} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_1 & 0 & X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ 0 & 0 & X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ 0 & 0 & X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし、 $\Gamma_1$  は  $r_1, \dots, r_k$  を対角要素とする対角行列であり、 $\Sigma_1$  は  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k (> 0)$  を対角要素とする対角行列である。以下では、これ

2 線形部分空間がなす角

が直交行列である事実をもとに小行列  $X_{ij}$  を決定する。はじめに、列ベクトルが正規直交系をなし、 $\Sigma$  の対角要素がゼロでないことから、 $X_{33}=\Gamma_1$  でなければならず、したがって、 $X_{34}, X_{35}, X_{43}, X_{53}$  はいずれも零行列でなければならない。さらに、 $U_3 = \begin{pmatrix} X_{44} & X_{45} \\ X_{54} & X_{55} \end{pmatrix}$  は直交行列でなければならないから  ${}^tU_3 U_3 = I_{n-r-k}$  である。以上により、 $U_2 = \hat{U}_2(I_k \oplus U_3)$  とおくと

$${}^t \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Sigma & 0 \\ \Sigma & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2r} \end{pmatrix}$$

が得られる。

註 2. 1 定理 2. 1 において、 $2r > n$  のときは、適当な直交行列

$$U = \overset{r}{U}_1 \oplus \overset{n-r}{U}_2, \quad V = \overset{r}{V}_1 \oplus \overset{n-r}{V}_2$$

により、

$${}^t \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} n-r & 2r-n & n-r \\ \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & -\Sigma \\ 0 & I_{2r-n} & 0 \\ \Sigma & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \end{matrix}$$

とすることができる。

定義 2. 1

$$(2. 2) \quad \begin{matrix} r & n-r \\ \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \overset{r}{\Gamma} & -\overset{r}{\Sigma} & 0 \\ \overset{r}{\Sigma} & \overset{r}{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{matrix} r & n-r \\ \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2r \leq n \text{ のとき})$$

または

$$(2. 3) \quad \begin{matrix} n-r & 2r-n & n-r \\ \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \overset{n-r}{\Gamma} & 0 & -\overset{n-r}{\Sigma} \\ 0 & I & 0 \\ \overset{n-r}{\Sigma} & 0 & \overset{n-r}{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{matrix} r & n-r \\ \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2r > n \text{ のとき})$$

を直交行列  $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$  のCS 分解という。なお、記号は上の定理 2. 1 と同じである。

補助定理 (特異値分解) 任意の行列  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  は, 適当な  $m$  次直交行列  $U$  と  $n$  次直交行列  $V$  を用いて,

$$A = UD^+V$$

と分解できる。 $D$  は  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \\ & & & 0 \end{pmatrix} (m \geq n)$  または  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \\ & & & 0 \end{pmatrix} (m < n), (0 \leq \alpha_i)$

のような形である。さらに,  $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$  あるいは  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0 (k = \min\{m, n\})$  とすれば,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  は, 行列  $A$  によって一意的に定まる。

補助定理の証明は[4]にゆずる。

註 2. 2  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_j > 0 = \alpha_{j+1} = \dots = \alpha_k (k = \min\{m, n\})$  とし,  $D^+ \in \mathbf{R}^{n \times m}$  を

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_j^{-1} & \\ \hline & & & 0 \end{pmatrix}$$

のような行列とすると,  $VD^+U$  を行列  $A$  の擬逆行列 (pseudo-inverse) といい,  $A^+$  と記す。

系 2. 1  $E, F$  が  $\mathbf{R}^n$  の  $r$  次元部分空間 ( $0 \leq r \leq n$ ) であるとき,  $E, F, E^\perp, F^\perp$  を<sup>4)</sup>生成する 4 組の正規直交ベクトル系を適当にとることにより, それらを列ベクトルとする行列  $M_1, N_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}, M_2, N_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$  は

$$(2. 4) \quad \begin{pmatrix} {}^t M_1 N_1 & {}^t M_1 N_2 \\ {}^t M_2 N_1 & {}^t M_2 N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Sigma & 0 \\ \Sigma & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & -\Sigma \\ 0 & I & 0 \\ \Sigma & 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

を満たすようにできる。

4)  $E^\perp = \{x \in \mathbf{R}^n : \forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0\}$  が定義で,  $E$  の直交補空間と呼ばれる。

証明 はじめに,  $E, F, E^\perp, F^\perp$  を生成する 4 組の正規直交ベクトル系を任意にとり, それらを列ベクトルとする行列  $M_1, N_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}, M_2, N_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$  から作られる直交行列  $\begin{pmatrix} {}^t M_1 N_1 & {}^t M_1 N_2 \\ {}^t M_2 N_1 & {}^t M_2 N_2 \end{pmatrix}$  の CS 分解を考えると, 定理 2.1 の  $U_1$  は  $r$  次直交行列であるから, 行列  $M_1 U_1$  の列ベクトルはなお部分空間  $E$  を生成する正規直交ベクトル系をなす. 同様に,  $M_2 U_2, N_1 V_1, N_2 V_2$  の列ベクトルは, それぞれ部分空間  $E^\perp, F, F^\perp$  を生成する正規直交ベクトル系をなす. そこでこれら 4 組の正規直交ベクトル系を列ベクトルとする行列をあらためて  $M_1, M_2, N_1, N_2$  とすれば (2.4) が得られる.  $\diamond$

系 2.2 行列  $M_1, N_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}, M_2, N_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$  を系 2.1 のように定義すると, 以下の等式が成り立つ.

$$(2.5) \quad \|M_1 {}^t M_1 - N_1 {}^t N_1\| = \|{}^t M_1 N_2\| = \|{}^t M_2 N_1\| = \max\{\Sigma \text{ の対角要素}\},$$

$$(2.6) \quad \mu(M_1 {}^t M_1 - N_2 {}^t N_2) = \mu({}^t M_1 N_1) = \mu({}^t M_2 N_2) = \min\{\Gamma \text{ の対角要素}\}.$$

このとき, (2.5) と (2.6) の値を  $\alpha, \beta$  とすると

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

証明

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {}^t M_1 \\ {}^t M_2 \end{pmatrix} (M_1 {}^t M_1 - N_1 {}^t N_1) (N_1 \quad N_2) &= \begin{pmatrix} 0 & {}^t M_1 N_2 \\ -{}^t M_2 N_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\Sigma & 0 \\ -\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} {}^t M_1 \\ {}^t M_2 \end{pmatrix} (M_1 {}^t M_1 - N_2 {}^t N_2) (N_1 \quad N_2) &= \begin{pmatrix} {}^t M_1 N_1 & 0 \\ 0 & -{}^t M_2 N_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$({}^t M_1 \quad {}^t M_2), (N_1 \quad N_2)$  が直交行列であることに注意すれば, これらの等式から (2.5) と (2.6) を得る.  $\diamond$



§ 3 二つの部分空間がなす角

定義 3.1  $R^n$  において, 二つの部分空間  $E, F$  がなす角  $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$  を

$$\cos \theta = \max \{ \langle u, v \rangle : u \in E, v \in F, \|u\|, \|v\| \leq 1 \}$$

によって定義する。これから直ちに,  $E \cap F \neq \{0\}$  のとき, かつ, このときにかぎって  $\cos \theta = 1 (\theta = 0)$  であり, また  $E \perp F$  のとき<sup>5)</sup>, かつ, このときにかぎって  $\cos \theta = 0 (\theta = \frac{\pi}{2})$  であることがわかる。

定理 3.1  $p, q$  をそれぞれ  $E, F$  上への正射影とし,  $\theta$  を  $E, F$  がなす角とすると

$$\cos \theta = \|pq\| = \|qp\|.$$

証明  $p, q$  は正射影であるから,  $'p=p, 'q=q$  であり, したがって,  $\|pq\| = \max \{ \langle y, pqx \rangle : \|x\| = \|y\| = 1 \} = \max \{ \langle py, qx \rangle : \|x\| = \|y\| = 1 \} = \max \{ \langle u, v \rangle : u \in E, v \in F, \|u\|, \|v\| \leq 1 \} = \cos \theta$ . 次に, (1. 3) により  $\|qp\| = \| 'q'p \| = \| '(pq) \| = \| pq \|$  を得る。◇

系 3.1  $E, F$  が同次元であるとき, 以下の命題は同値である。

- (i)  $E, F^\perp$  は互いに補空間である<sup>6)</sup>。
- (ii)  $E^\perp, F$  は互いに補空間である。
- (iii)  $p+q-I$  は正則である。

証明  $E, F$  が同次元であるから,  $E, F^\perp$  が互いに補空間であることは  $E \cap F^\perp = \{0\}$  であることと同値である。  $E \cap F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow E$  と  $F^\perp$  がなす角

5)  $E \perp F$  は, すべての  $u \in E, v \in F$  に対して  $u \perp v$  すなわち  $\langle u, v \rangle = 0$  が成り立つことを表す。  
 6)  $R^n$  の部分空間  $E, F^\perp$  がたがいに補空間であるとは,  $R^n = E + F^\perp$  かつ  $E \cap F^\perp = \{0\}$  であること。

を  $\theta$  としたとき  $\cos \theta \neq 1 \Leftrightarrow [\Gamma \text{ の対角要素} < 1] \Leftrightarrow [\Sigma \text{ の対角要素} > 0]$  である。(1. 6) と (2. 6) から  $[\Sigma \text{ の対角要素} > 0] \Leftrightarrow [p - (I - q) \text{ が正則}]$  が得られる。◇

#### § 4 射影

この § では、 $E, F$  を  $\mathbf{R}^n$  の  $r$  次元部分空間とし、 $f$  を  $F^\perp$  に沿った  $E$  上への射影、すなわち  $f^2 = f, f(\mathbf{R}^n) = E, \text{Ker}(f) = F^\perp$  であるような  $\mathbf{R}^n$  上の線形変換とする。この射影  $f$  については次の定理が成り立つ。なお、一般に正規直交ベクトル系を列ベクトルとする行列を  $T$  とすると、 $T'T$  はその正規直交ベクトル系によって生成される部分空間への正射影を表す行列である。

定理 4. 1 零変換でない射影  $f$  に対して、 $E, F, E^\perp, F^\perp$  を生成する 4 組の正規直交ベクトル系を適当にとりてそれらを列ベクトルとする行列  $M_1, N_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}, M_2, N_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$  を用いることにより、 $f$  の特異値分解が

$$(4. 1) \quad (M_1 \ M_2)(D \oplus 0) \begin{pmatrix} {}^t N_1 \\ {}^t N_2 \end{pmatrix} = M_1 D {}^t N_1,$$

で与えられ、

$$(4. 2) \quad \begin{pmatrix} {}^t M_1 N_1 & {}^t M_1 N_2 \\ {}^t M_2 N_1 & {}^t M_2 N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Sigma & 0 \\ \Sigma & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2r} \end{pmatrix} (2r \leq n),$$

$$\text{または} \quad \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & -\Sigma \\ 0 & I_{2r-n} & 0 \\ \Sigma & 0 & \Gamma \end{pmatrix} (n < 2r)$$

が成り立つようにできる。ここで、 $D$  は対角要素がすべて 1 以上である  $r$  次対角行列、 $\Gamma = D^{-1}(2r \leq n$  のとき)、 $\Gamma \oplus I_{2r-n} = D^{-1}(n < 2r$  のとき)、 $\Sigma$  は対角要素がすべて非負の  $\Gamma^2 + \Sigma^2 = I_r$  を満たす  $r$  次対角行列である。

証明 はじめに、 $f$  の特異値分解が (4. 1) のように得られたとする。定理の前提から  $D$  の対角要素はすべて正である。 $f^2 = f$  すなわち  $(M_1 D {}^t N_1)^2$

2 線形部分空間がなす角

$=M_1D^tN_1$  から,

$$(4.3) \quad {}^tN_1M_1 = {}^tM_1N_1 = D^{-1}$$

を得る。(4.2) の左辺は直交行列であることから,

$$I_r = \begin{pmatrix} {}^tM_1N_1 \\ {}^tM_2N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tM_1N_1 \\ {}^tM_2N_1 \end{pmatrix} = D^{-2} + {}^tN_1M_2M_2N_1.$$

これから  $D$  の各対角要素は 1 以上でなければならないことがわかる。後は、行列  $\begin{pmatrix} {}^tM_1N_1 & {}^tM_1N_2 \\ {}^tM_2N_1 & {}^tM_2N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{-1} & {}^tM_1N_2 \\ {}^tM_2N_1 & {}^tM_2N_2 \end{pmatrix}$  に対して CS 分解の場合と同様の処理を行うことにより、直交行列  $U_2, V_2$  が得られ、 $M_2U_2, N_2V_2$  をあらためて  $M_2, N_2$  とすることにより等式 (4.2) が得られる。◇

系 零変換でない射影  $f$  については、 $\|f\| \geq 1$  が成り立つ。さらに、 $\|f\| = 1$  であることは、 $f$  が正射影であることと同値である。

証明 (4.1) および (1.7) により  $\|f\| \geq 1$  である。 $\|f\| = 1$  とすると、 $D=I$  であるから  $f$  の表現行列は、 $M_1^tN_1$  であるが (4.3) から  $M_1=N_1$  なので  $M_1^tM_1$  である。これは、 $f$  が正射影であることを示す。逆に、 ${}^t f = f$  を仮定すると、 $M_1D^tN_1 = N_1D^tM_1$ 。両辺に  $N_1$  を右から乗じて  ${}^tM_1N_1 = D^{-1}$  を用いれば、 $D = {}^tM_1N_1$  を得る。したがって、 $D = D^{-1}$ 、すなわち、 $D = I$ 。よって  $\|f\| = 1$  である。◇

以下では、 $g$  を  $F$  に沿った  $E^\perp$  上への射影 ( $g(\mathbf{R}^n) = E^\perp, \text{Ker}(g) = F$ ) とする。

定理 4.2 (i)  $f$  が零変換でなければ、 $f(\mathbf{R}^n)$  と  $\text{Ker}(f)$  とがなす角を  $\theta$  とすると、

$$\|f\| = \frac{1}{\sin \theta}.$$

2 線形部分空間がなす角

(ii)  $f$  が恒等変換でも零変換でもなければ,

$$\|f-g\| = \|f\| = \|g\|.$$

(iii)  $p, q$  をそれぞれ部分空間  $E, F^\perp$  への正射影すると,

$$f-g = (p-q)^{-1}.$$

証明 定理 4.1 の記号をそのまま用いることにする。(i)  $\|f\| = \max\{D$  の対角要素 $\} = 1/\min\{\Gamma$  の対角要素 $\} = 1/\mu(M_1^t N_1)$  で,  $\mu(M_1^t N_1)^2 = 1 - \|M_1 N_2\|^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ . よって求める等式が得られる。

以下では,  $g$  の特異値分解を

$$(M_1 \ \bar{M}_2)(0 \oplus \bar{D}) \begin{pmatrix} {}^t N_1 \\ {}^t \bar{N}_2 \end{pmatrix} = \bar{M}_2 \bar{D} {}^t \bar{N}_2$$

とする。この結果, 直交行列  $U_2, V_2$  によって  $\bar{M}_2 = M_2 U_2, \bar{N}_2 = N_2 V_2$  であり, また,  $\bar{D}^{-1} = {}^t \bar{M}_2 \bar{N}_2$  である。

(ii)  $f-g$  を行列で表すと,  $(M_1 \ \bar{M}_2)(0 \oplus -\bar{D}) \begin{pmatrix} {}^t N_1 \\ {}^t \bar{N}_2 \end{pmatrix}$

であるから,

$$\|f-g\| = \|D \oplus -\bar{D}\| = \max\{\|D\|, \|\bar{D}\|\}$$

である。 $\mu(\bar{D}^{-1}) = \mu({}^t \bar{M}_2 \bar{N}_2) = \mu({}^t U_2 {}^t M_2 N_2 V_2) = \mu({}^t M_2 N_2) = \mu(D^{-1})$  であるから,  $\|D\| = \|\bar{D}\|$ . よって求める等式が得られる。

(iii)  $(f-g)(p-q)$  を行列で表すと,

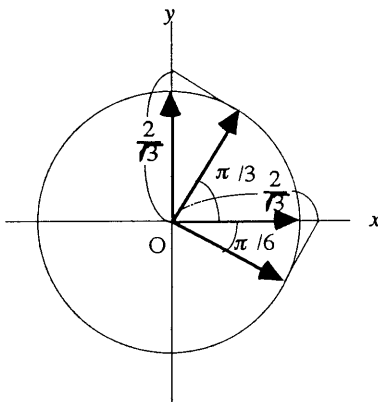
$$\begin{aligned} & (M_1 D {}^t N_1 - \bar{M}_2 \bar{D} {}^t \bar{N}_2)(M_1^t M_1 - \bar{N}_2^t \bar{N}_2) \\ &= M_1 D {}^t N_1 M_1^t M_1 - M_1 D {}^t N_1 \bar{N}_2^t \bar{N}_2 - \bar{M}_2 \bar{D} {}^t \bar{N}_2 M_1 M_1 + \bar{M}_2 \bar{D} {}^t \bar{N}_2 \bar{N}_2^t \bar{N}_2 \\ &= M_1^t M_1 - 0 + \bar{M}_2 \bar{D} {}^t \bar{N}_2 (I - M_1^t M_1) = M_1^t M_1 + \bar{M}_2 \bar{D} {}^t \bar{N}_2 \bar{M}_2^t \bar{M}_2 \\ &= M_1^t M_1 + \bar{M}_2^t \bar{M}_2 = I. \end{aligned}$$

例  $w(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $R(\theta) = (w(\theta) \ w(\pi/2 + \theta))$  (原点を中心とする角  $\theta$  の回転の行列) とする。 $f$  を  $w(\pi/3)\mathbf{R}$  に沿った  $w(0)\mathbf{R}$  上への射影

2 線形部分空間がなす角

とすると,  $f w(-\pi/6) = w(0)2/\sqrt{3}$ ,  $f w(\pi/3) = 0$  であるから,  $f$  の特異値分解は

$$R(0) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t R(-\pi/6)$$



である.  $f(R^2) = w(0)R$  と  $\text{Ker}(f) = w(\pi/3)R$  がなす角は  $\pi/3$  であり,  $\|f\| = 2/\sqrt{3} = 1/\sin(\pi/3)$  である.  $g$  を

$w(-\pi/6)R$  に沿った  $w(\pi/2)R$  上への射影とすると,  $g w(\pi/3) = w(\pi/2)2/\sqrt{3}$ ,  $g w(-\pi/6) = 0$  であるから,  $g$  の特異値分解は

$$R(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} {}^t R(-\pi/6)$$

である.  $p, q$  を  $w(0)R$  および  $w(\pi/3)R$  への正射影とすると,  $(f-g)(p-q)$  を表す行列は

$$\begin{aligned} & R(0) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} {}^t R(-\pi/6) (w(0) {}^t w(0) - w(-\pi/6) {}^t w(-\pi/6)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\pi/6) \begin{pmatrix} 1 - \cos^2(\pi/3) & -\sin(\pi/3)\cos(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3)\cos(\pi/3) & -\sin^2(\pi/3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\pi/6) \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \\ -\cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\pi/2) & -\cos(\pi/2) \\ -\cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2 線形部分空間がなす角

### 参考文献

- [1] G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix computations*, The John Hopkins University Press, 1989.
- [2] I.C.F. Ipsen and C.D. Meyer, The Angle Between Complementary Subspaces, *The American Mathematical Monthly*, **102** (1995), 904-911.
- [3] B.N. Parlett and W.G. Poole, Jr., A geometric theory for the QR, LU and power iterations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 389-412.
- [4] 関本年彦 線形最小二乗法の諸問題(Ⅰ) 成城大学「経済研究」第127号 1995
- [5] G.W. Stewart, *Introduction to matrix computations*, Academic Press, Inc., 1973.
- [6] G.W. Stewart and Ji-guang Sun, *Matrix perturbation theory*, Academic Press, Inc., 1990.