厚生尺度：部分情報と近似

小　平　　裕

1. はじめに

私たちは，前稿（小平（1998））において，その消費者の支出関数に関する情報さえあれば，価格変化が消費者の経済厚生に与える衝撃は，正確にそして便利な形で（すなわち貨幣表示で）測定できることを明らかにした。さらに，Kihlstrom, Mas-Colell, and Sonnenschein (1976) の示した，消費者の選好と支出関数は市場において観察される Walras 的需要曲線 $x(p, I)$ から導き出されるという結果を考え合わせると，結局，Walras 的需要曲線から貨幣表示の厚生尺度が導出できることが分かる。

本稿では，前稿を補完する意味で，２つの問題を取り上げる。第１は，消費者の支出関数を導き出すための十分な情報を利用できない場合である。私たちは，価格変化が消費者の経済厚生に与える衝撃を，変化前の価格ベクトル p^a と変化後の p^b，価格変化前の消費組み合わせ $x(p^a, I)$ という部分情報だけから検証する方法を考察する。第２に，厚生尺度の近似として，市場（Walras 的）需要曲線の左側の面積を利用する方法を取り上げる。これを紹介するのは，その歴史的重要性のためであるが，ここではこの方法の近似度を検討する。

2.　部分情報による厚生尺度

消費者の Walras 的需要曲線について利用可能な情報が限られる場合があり，その場合には消費者の支出関数を導き出せない可能性がある。ここでは，私たちが入手できる情報が，価格変化前と変化後の２つの価格ベクトル p^a と p^b，初期消費計画 $x^a=x(p^a, I)$ に関する知識に限られる場合に，厚生尺度について何が主張できるかを考えよう。

最初に，その消費者の厚生が，価格変化の結果として改善したかどうかを調べる方法を考えてみよう。

命題１：局所的に非飽和の合理的な選好関係を持つ消費者を想定する。もし

(1)　$$(p^b-p^a)x^a<0$$

であれば，その消費者は価格と富の組み合わせ (p^a, I) の下よりも，(p^b, I) の下において厳密に良化している。

（証明）　証明は，顕示選好の理論による。Walras 法則により $p^a x^a=I$ であるから，もし(1)が成り立てば，$p^b x^a<I$ である。しかしこの場合，初期消費計画 x^a は価格 p^b の下で購入可能であり，予算集合 $B(p^b, I)$ の内部に属する。選好は局所的に非飽和であるので，この消費者が x^a よりも厳密に選好する消費組み合わせが，予算集合 $B(p^b, I)$ の中に存在する。（証了）

(1)は，真の厚生変化に対する１次近似と見なすことができる。これを理解するために，最小支出関数 $E(p,u)$ を，初期価格 p^a の回りで Taylor 展開する。

(2)　$$E(p^b, u^a)=E(p^a, u^a)+(p^b-p^a)\cdot\nabla_p E(p^a, u^a)+o\left(\left\|p^b-p^a\right\|\right)$$

ただし，$\nabla_p E(p^a, u^a)$ は，支出関数の初期価格ベクトル p^a における勾配

ベクトル，$o(\|p^b - p^a\|)$ は高次の残余項である。ここで，もし

(3) $$(p^b - p^a)\cdot\nabla_p E(p^a,\ u^a)<0$$

であり，高次の残余項は無視できるとすれば，(2)より

$$E(p^b,\ u^a)<E(p^a,\ u^a)=I$$

が成立して，経済厚生は価格変化後の方が大きいことが分かる。すなわち，その消費者は良化する。なお，$E(.,u^a)$ の p に関する凹性[1]は，残余項が非正であることを意味するから，残余項を無視しても，ここでは誤りにつながらない。すなわち，もし(3)が成立すれば

$$E(p^b,\ u^a)<I$$

を得，したがって

(4) $$(p^b - p^a)\cdot\nabla_p E(p^a,\ u^a)=(p^b - p^a)\cdot h(p^a,u^a)=(p^b - p^a)\cdot x^a$$

であることが分かる。

逆に，もし

(5) $$(p^b - p^a)x^a<0$$

である場合には，一般的には何も言えない。しかし，もし価格変化が十分に小さければ，残余項は１次項に比べて大きくなく，したがって無視することができるので，確定的な結論を得ることが，Taylor 展開(2)から分かる。これは次の結果を与える。

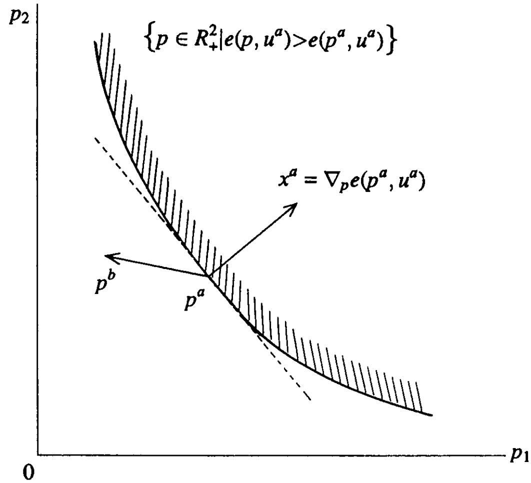
命題２：その消費者は，微分可能な支出関数を持つと仮定しよう。この時，もし(5)が成り立てば，全て $\alpha<\overline{\alpha}$ のについて

$$E\big((1-\alpha)p^a+\alpha p^b,\ u^a\big)>I$$

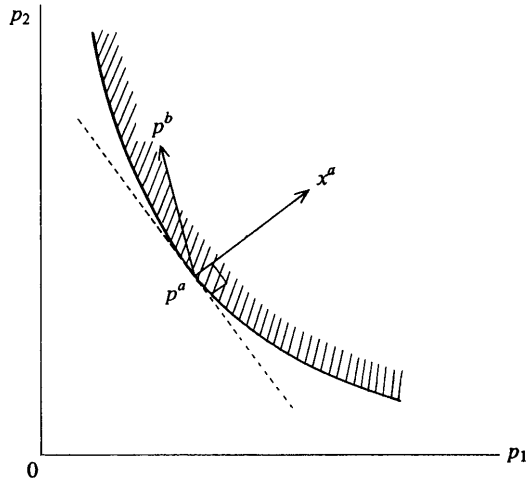
となるような，すなわちその消費者が価格と富の組み合わせ $(p^a,\ I)$ の下において，$\big((1-\alpha)p^a+\alpha p^b,\ I\big)$ よりも厳密に良化するような十分に小さな $\overline{\alpha}\in(0,1)$ が存在する。

1）小平（1997）参照。

図１：命題１と命題２



(a)



(b)

図を使って，命題2を説明しよう。図1は，価格空間に価格の集合

(6) $$\left\{p \in R_{+}^{2} | E(p, u^{a}) > E(p^{a}, u^{a})\right\}$$

を描いている。図1(a)は，新しい価格ベクトル p^b について(1)が成立する場合を，図1(b)は(5)が成立する場合を示している。支出関数 $E(., u)$ の凹性により，価格集合は図に描かれたような形状になる。初期価格ベクトル p^a は，この集合に属する。支出関数の初期価格ベクトルにおける勾配ベクトル $\nabla_p E(p^a, u^a)$ は，x^a すなわち初期消費計画に等しい。ベクトル $(p^b - p^a)$ は，点 p^a と新しい価格点 p^b を結ぶベクトルである。

(1)が成立する場合には，図1(a)から分かるように，p^b は集合

$$\left\{p \in R_{+}^{2} | E(p, u^{a}) \geqq E(p^{a}, u^{a})\right\}$$

の外部に位置する。したがって

$$E(p^{a}, u^{a}) > E(p^{b}, u^{a})$$

でなければならない。他方，(5)が成立する場合には，図1(b)より，もし $(p^b - p^a)$ が十分小さければ

$$E(p^{a}, u^{a}) < E(p^{b}, u^{a})$$

であることが分かる。というのは，もし(5)が成立し，p^b が（方向 $p^b - p^a$ を持つ半直線の上で）p^a に十分近いならば，価格ベクトル p^b は集合(6)に属するからである。

3. 面積変分尺度

市場で観察される需要行動から，その消費者の選好ないしは支出関数を容易に導き出せるようになった。小平（1997）で示したように，Hicks の等価変分あるいは補償変分の何れによっても，価格変化により引き起こされる厚生変化を，正確に捉えることができる。そしてこれらの厚生尺度は，適切な Hicks 的需要曲線の左側の面積を使えば計算可能である。しかし，適切な Hicks 的需要曲線は直接には観察不可能であるので，これらの厚生尺度を計算するのは困難であるという問題が残る。

応用分析において伝統的に広く利用されている方法は，真の厚生変化尺度の近似として，Walras 的（市場）需要曲線の左側の面積を利用することである。「面積変分」AV 尺度と呼ばれるこの近似は

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{AV}(p^a, p^b, I) = \int_{p_1^b}^{p_1^a} x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, I)dp_1$$

と定義される。

もし財 1 に富効果がなければ，全ての p について

$$x_1(p, I) = h_1(p, u^a) = h_1(p, u^b)$$

であり，面積変分尺度は等価変分および補償変分と等しくなる。これは，Marshall (1898) が考察した，価値尺度財の限界効用が一定である場合に対応する。AV 尺度が厚生変化の正確な尺度を与えるこの場合，この尺度は「Marshall 的消費者余剰」consumers' surplus として知られている。

一般的には，富効果があると考えられ，限界効用は一定ではない。その場合にはこのような関係は成立しない。財 1 が正常財である時には，面積変分尺度は補償変分より大きく，等価変分より小さく表れる（前稿（小平（1998）の図 3 を参照せよ）[2]。財 1 が劣等財である時には，逆が成立する。このように，幾つかの財の価格の変化からの厚生変化を評価する時，あるいは 2 つの可能な価格変化を比較する時には，面積変分は必ずしも厚生変化の正しい評価を与えない。

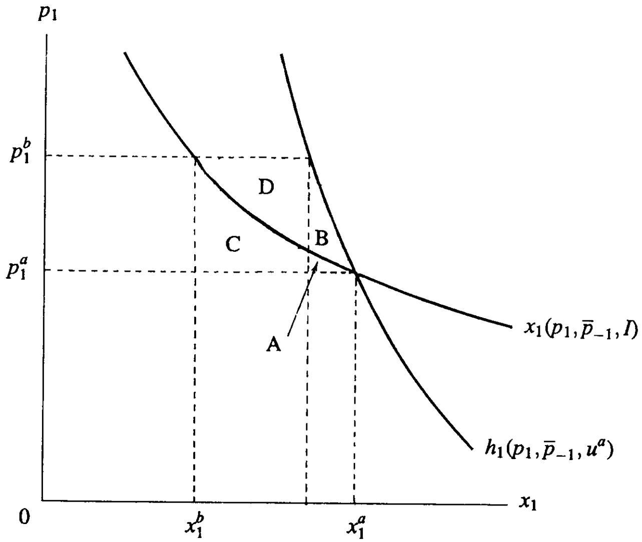
しかし，もし考察している財について富効果が小さければ，近似誤差も小さくなり，面積変分尺度も経済厚生への衝撃を殆ど正しく示すことになる。Marshall は，もしある財が多数の中の 1 つの商品に過ぎないならば，富の追加的な 1 単位は複数の財に支出されてしまうので，その商品についての富効果は小さくなるに違いなく，したがって面積変分を利用して，その財に対する価格変化の厚生効果を評価しても，顕著な間違いは犯さないと主張した[3]。しかし，多数の商品がある場合，各財についての近似誤差

2) 価格が上昇しても下落しても，これが成立する。

は個別的には小さいかも知れないが，集計すると小さくなくなる可能性がある。

もし $(p_1^b - p_1^a)$ が小さいならば，面積変分尺度を使う際に生じる誤差は，総厚生変化に対する割合としては小さくなる。例えば，補償変分を考えよう。[4] 図2において，面積 **B+D** は面積変分と真の補償変分の間の違いを測っているが，$(p_1^b - p_1^a)$ が小さい時に，これは真の補償変分に対する割合としては小さくなることが分かる。これは，面積変分は，小さな価格変化について補償変分尺度の良い近似であることを示しているように見えるかも知れない。しかし，Walras 的需要関数の代わりに，p_1^a における値が $x_1(p_1^a, p_{-1}^a, I)$ である任意の関数を使っても，同じ性質は成立する。[5] そして，死加重に対する割合としての近似誤差は，極めて大きくなる可能性がある

図2：面積変分尺度の誤差



3) Marshall（1898, 第 6 章）。Vives (1987) も参照せよ。
4) 以下は全て，等価変分にも当てはまる。
5) Walras 的需要関数は補償変分の 1 次近似になる。

(Hausman (1981) 参照)。例えば図２では，Walras 的需要曲線を使って計算される死加重は A+C であるのに対して，真の死加重は面積 A+B である。これらの２つの面積の違いの割合は，価格変化が小さくなっても，必ずしも小さくならない。[6)]

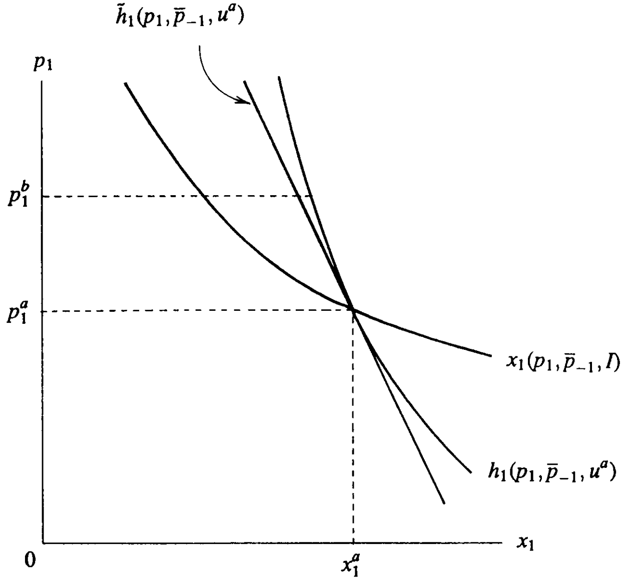
$(p_1^b - p_1^a)$ が小さい場合には，もっと優れた近似手続きが利用可能になる。すなわち，Hicks 的需要関数 $h(p, u^a)$ の初期価格ベクトル p^a における１階の Taylor 展開

(8) $$\tilde{h}(p, u^a) = h(p^a, u^a) + \nabla_p h(p^a, u^a)(p - p^a)$$

を使い，厚生変化の近似として

(9) $$\int_{p_1^b}^{p_1^a} \tilde{h}_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^a)\,dp_1$$

図３：$h_1(p, u^a)$ の p^a における１階の近似



6) したがって，小平（1998）の第５節で検討した，等税収 T の２種類の税の死加重の比較について，面積変分尺度は必ずしも正しい順序付けを与えない。

を計算すれば良い。図3に描かれた関数 $\tilde{h}_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^a)$ は，p^a において真の Hicks 的需要関数 $h_1(p, u^a)$ と同じ傾きを持つので，小さな価格変化について，(9)は(7)よりも真の厚生変化に近くなる（そして，面積変分尺度とは違い，(7)は死加重を適切に近似する）。Hicks 的需要曲線は支出関数の1次導関数であるから，Hicks 的需要関数の p^a における1階の Taylor 展開は，支出関数の p^a の回りにおける2階の展開になる。したがって，この近似は，上の議論の自然な拡張と見なすことができる。

(2)の近似は，観察可能な Walras 的需要関数 $x_1(p, I)$ の知識から，直接に計算可能である。このことを見るために

$$h(p^a, u^a)=x(p^a, I)$$

$$\nabla_p h(p^a, u^a)=S(p^a, I)$$

であるので，(8)で定義される $h(p, u^a)$ の Taylor 展開 $\tilde{h}(p^a, u^a)$ は，Walras 的需要関数と点 (p^a, I) におけるその導関数を含む項だけで表すことができることに注意しよう。すなわち

(10) $$\tilde{h}(p, u^a)=x(p^a, I)+S(p^a, I)(p-p^a)$$

特に，財1の価格のみが変化する場合には，(10)は

(11) $$\tilde{h}(p, u^a)=x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, I)+s_{11}(p_1^a, \bar{p}_{-1}, I)(p_1-p_1^a)$$

と簡単になる。ただし

$$s_{11}(p_1^a, \bar{p}_{-1}, I)=\frac{\partial x_1(p^a, I)}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1(p^a, I)}{\partial I}x_1(p^a, I)$$

(p^b-p^a) が小さい時には，(9)による近似は，面積変分尺度(7)よりも，真の補償変分について良い近似を与える。しかし，もし (p^b-p^a) が大きいならば，どちらが良い近似か言うことはできない。面積変分尺度の方が優れている場合もある。というのは，面積変分尺度(7)は，p^a から離れた価格における需要行動も多少，考慮するのに対して，(9)は全く考慮しないからである。

4. 参照文献

J. Hausman (1981), Exact Consumer Surplus and Deadweight Loss, *American Economic Review* 71 : 662–76.

R. Kihlstrom, A. Mas-Colell, and H. Sonnenschein (1976), The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference, *Econometrica* 44 : 971–78.

A. Marshall (1898), *Principles of Economics,* 4th ed. ; 9th ed. (1961)（馬場啓之助訳『経済学原理』，東洋経済新報社，1965–67）

X. Vives (1987), Small Income Effects : A Marshallian Theory of Consumer Surplus and Downward Sloping Demand, *Review of Economic Studies* 54 : 87–103.

小平裕（1997），「厚生変化の尺度について」，成城大学『経済研究』138号。

小平裕（1998），「Hicks の尺度について」，成城大学『経済研究』139号。