一般均衡モデルの根岸表現と存在証明

小　平　　裕

1.　はじめに

経済を，いく人かの消費者の活動といく人かの生産者（あるいはいくつかの家計といくつかの企業）の活動の相互作用として捉える一般均衡理論は，直感的には模索過程をイメージした超過需要関数に基づくモデルを用いて，Walras (1874–77) により始められた。均衡解の存在について数学的に厳密な議論を初めて展開したのは，1930年代の Wald (1934–35) であり，その後1950年代に Arrow and Debreu (1954), McKenzie (1954) (1959), Gale (1955), Nikaido (1956) (1957) らによって，不動点定理を用いた存在証明が与えられた。

しかし，一般均衡モデルの表し方はこれに限られるものではない。本稿の目的は，根岸 (Negishi (1960), 根岸 (1965)) による社会厚生関数を利用する表し方（いわゆる，根岸表現）を紹介し，均衡存在について別証明を与えることである。

上に紹介した1950年代の存在証明では，市場における需要と供給を等しくする均衡価格体系の存在を示すことが中心となっている。これに対して，根岸表現は，競争均衡は Pareto 効率的な資源配分であるという厚生経済学の基本命題を利用する。つまり，競争均衡の厚生経済学的性質，すなわち社会厚生関数は，競争均衡において最大化されるという事実に着目して，そのような社会厚生関数の存在を示すことを通じて，競争均衡の存在を証明するのである。

2. モデル

意思決定をする主体として，m 人の消費者（あるいは家計）と n 人の生産者（あるいは企業）がおり，l 種類の財・サービス（以下では，簡単に財と呼ぶ）が取り引きされる経済を考えよう。ただし，m，n，l は有限とする。財 $k = 1, \ldots, l$ は，物理的特性の他，配達の地点と期日により区別され，1つの価格 p_k で取り引きされる。財空間は，R^l と表される l 次元空間となる。

消費者 $i = 1, \ldots, m$ は，効用関数 $u_i(.)$ と初期賦存量 $\omega_i \in R^l$ が与えられた時に，市場で成立している価格 $p \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_l) \in R^l$ において，購入を希望する財の組合せ $x_i(p) \in R^l$ を示す。効用関数は，各消費計画 x_i に効用水準 $u_i(x_i)$ を関係付けるものであり，以下で説明する仮定の下では，さまざまな消費計画を整合的に順位付けることができる。

消費者 i の行う選択は，2つの点で制約される。第1に，どの財についても負の量を消費することはできないという意味で，消費計画は実行可能でなければならない。すなわち，$x_i \in R_+^l$ である。第2に，自分の所得 h_i を上回る支出はできないという予算の制約を受ける。ここで，価格 p が与えられた時，消費計画 x_i の費用は px_i であるから，消費者 i の予算制約は

$$px_i \leq h_i$$

と表される。

消費者の所得 h_i は，賦存量 ω_i を販売することから得られる収入 $p\omega_i$ と，配分される利潤の2つの部分からなる。後者は，次のように定義される。消費者 i は，企業 j の非負の割合 θ_{ij} を所有しており，この企業の利潤 $\pi_j(p)$ から配当 $\theta_{ij}\pi_j(p)$ を受け取る。なお，この $\pi_j(p)$ の定義は以下の(3)において与えられる。利潤は全て分配されると想定するので，全ての j について $\sum_i \theta_{ij} = 1$ である。したがって，消費者 i の所得は

$$h_i = p\omega_i + \sum_j \theta_{ij}\pi_j(p)$$

と表される。

消費者 i の問題は，ここで次のように述べることができる。価格ベクトル p と収入 h_i が与えられた時，消費者 i は，実行可能性制約 $x_i \geq 0$ と予算制約 $px_i \leq h_i$ の下で，効用 $u_i(x_i)$ を最大にするような x_i を選ぶ。すなわち

(1) $$x_i(p) = \arg\max_{x_i \geq 0}\left\{u_i(x_i) | px_i \leq h_i\right\}$$

実行可能な生産計画の集まりである集合 Y_j で表される技術を与えられている生産者 $j=1,2,\ldots,n$ は，労働や鉄，機械などの幾種類かの財を購入し利用して，財を生産し販売する。$Y_j \subset R^l$ である。産出量を正の値で，投入量を負の値で測かることにすると，実行可能な生産計画 $y_j \in Y_j$ の利潤は，$\sum_k p_k y_{jk}$ すなわち py_j と表される。

したがって，生産者 j の問題は，次のように述べることができる。生産技術集合 Y_j が与えられた時，生産者は，市場価格 p に対して，実行可能性制約 $y_j \in Y_j$ の下で利潤 py_j を最大にするように y_j を選ぶ。すなわち

(2) $$y_j(p) = \arg\max_{y_j}\left\{py_j | y_j \in Y_j\right\}$$

この時，得られる最大利潤は

(3) $$\pi_j(p) = \max_{y_j}\left\{py_j | y_j \in Y_j\right\}$$

により与えられる。

超過需要ベクトル $z(p)$ は

$$z(p) = \sum_i x_i(p) - \sum_j y_j(p) - \sum_i \omega_i$$

と定義される。このベクトルの成分 $z_k(p)$ は，財 k の需要が（初期賦存量を含む）供給を上回る超過分を表している。

もしある財について超過需要になっていれば，一部の消費者は自分の消費計画を実現することができないから，自然な均衡概念は，どの財も超過需要にならないことを要求することである。しかし，超過供給は無償で処分することができると仮定するので，一部の財について超過供給があることは許される。超過需要均衡は，次のように定義される。

定義 1 （超過需要均衡）

価格 $p^*\geq 0, p^*\neq 0$ と超過需要 $z(p^*)$ は，もし $z(p^*)\leq 0$ であれば，超過需要均衡を定義する。

一般競争均衡を，消費者達と生産者達がそれぞれ(1)と(2)に従って行動する超過需要均衡として定義することができる。

定義 2 （一般競争均衡）

価格ベクトル $p^*\geq 0, p^*\neq 0$ によって支持される配分 $x_i^*(i=1, 2, \ldots, m)$, $y_j^*(j=1, 2, \ldots, n)$ は，以下の条件が満たされるとき，一般競争均衡である。

(i) $$x_i^*=\arg\max_{x_i\geq 0}\left\{u_i(x_i)|p^*x_i\leq h_i^*\right\} \qquad i=1, 2, \ldots, m \text{ について}$$

ただし，$h_i^*=p^*\omega_i+\sum_j \theta_{ij}p^*y_j^*$。

(ii) $$y_j^*=\arg\max_{y_j}\left\{p^*y_j|y_j\in Y_j\right\} \qquad j=1, 2, \ldots, n \text{ について}$$

(iii) 全ての市場は均衡している。すなわち，$\sum_i x_i^*-\sum_j y_j^*-\sum_i \omega_i\leq 0$。

一般均衡均衡の存在を証明するために，次の仮定を利用する。

仮定 C1（効用関数）

全ての i について，$u_i(x_i)$ により与えられる効用関数 $u_i : R_+^l \to R_+$ は，連続，厳密に凹，非飽和であり，$u_i(0)=0$ を満たす。また，効用関数 u_1 は，全ての財に関して増加的である。

仮定 C2（賦存量）

全ての i について，$\omega_i \geq 0$ かつ $\omega_i \neq 0$。また，$\omega_1 > 0$。

仮定 P（生産集合）

生産者 j の生産集合 Y_j は，無活動の可能性 $(0 \in Y_j)$ を持ち，コンパクトかつ凸である。

3. 厚生経済学の基本命題

本節は，一般競争均衡の規範的性質を紹介する。

定義 3（Pareto 効率的配分）

配分 $x_i \geq 0\,(i=1,2,...,m)$, $y_j \in Y_j\ (j=1,2,...,n)$ は，もし以下の 2 つの条件を満たすような他の実行可能な配分 $x_i'\,(i=1,2,...,m)$, $y_j'\,(j=1,2,...,n)$ が存在しなければ，Pareto 効率的である。すなわち

(i) 実行可能

$$\sum_i x_i \leq \sum_j y_j + \sum_i \omega_i$$

であり，かつ

(ii) $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ 全ての i について

であり，少なくとも 1 人の消費者，例えば s について

$$u_s(x_s') > u_s(x_s)$$

が成立する。

言い換えると，効用で測った時に，誰も悪化させることなく，少なくと

も1人の消費者を良化させるような実行可能な他の配分（それは，Pareto 優位な配分と言われる）を見つけることができなければ，配分は Pareto 効率的である。

命題1（第1厚生定理）

生産者 j の生産集合は非空かつコンパクトであるとし，消費者 i の効用関数は連続かつ非飽和であるとしよう。この時，もし存在すれば，価格ベクトル p^* の下での競争均衡配分 $x_i^*\,(i=1,2,...,m)$, $y_j^*\,(j=1,2,...,n)$ は Pareto 効率的である。

（証明）

価格 p^* が与えられた時，所得 $h_i^* = p^*\omega_i + \sum_j \theta_{ij}\pi_j\,(p^*)$ を持つ消費者の効用最大化問題の解

(4) $$x_i^* = \arg\max_{x_i \geq 0}\left\{u_i(x_i) | p^* x_i \leq h_i^*\right\}$$

を考えよう。最初に，任意の非負の消費に対して，次の2つが成立することを示そう。

(i) もし $u_i(x_i^0) > u_i(x_i^*)$ であれば，$p^*x_i^0 > p^*x_i^*$ である。

(ii) もし $u_i(x_i^0) \geq u_i(x_i^*)$ であれば，$p^*x_i^0 \geq p^*x_i^*$ である。

(i)を確認するために，$p^*x_i^0 \leq p^*x_i^*$ であると仮定しよう。このことは，(4)において x_i^0 が実行可能であることを意味し，x_i^* の最適性に矛盾する。(ii)を確認するために，2つの場合に分けて検討する。もし最初の不等号が厳密であり，後の不等号が成立しなければ，(i)の場合に戻る。次に，もし $u_i(x_i^0) = u_i(x_i^*)$ かつ $p^*x_i^0 < p^*x_i^*$ であれば，効用の非飽和性により，$u_i(x_i'') = u_i(x_i^*)$ かつ $p^*x_i'' = p^*x_i^*$ であるようなベクトル x_i'' が存在する。このことは，再び，x_i^* の最適性に矛盾する。以上で，(i)(ii)の成立が確認され，均衡配分 x_i^*, y_j^* の Pareto 効率性を証明する準備が整った。

命題を否定して，この均衡配分に対して Pareto 優位な配分 x_i', y_j' が存

在すると主張しよう。すなわち，全ての i について

$$u_i(x_i') \geq u_i(x_i^*)$$

が成立し，少なくとも 1 人の消費者，例えば s については

$$u_i(x_i') > u_i(x_i^*)$$

が成立する配分 x_i', y_j' が存在するものとしよう。上の(i)(ii)により，s を除く全ての i については

$$p^* x_i' \geq p^* x_i^* = p^* \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p^* y_j^*$$

が成立し，s に対しては

$$p^* x_s' > p^* x_s^* = p^* \omega_s + \sum_j \theta_{sj} p^* y_j^*$$

が成立するから，これらの m 本の不等式を足し合わせて

(5) $$p^* \sum_i x_i' > p^* \sum_i \omega_i + \sum_i \sum_j \theta_{ij} p^* y_j^* = p^* \sum_i \omega_i + p^* \sum_j y_i^*$$

を得る。

ここで，配分 x_i', y_j' は実行可能であるから

$$\sum_i x_i' \leq \sum_i \omega_i + \sum_j y_j'$$

を満たしているので，(5)の左辺において $\sum_i x_i'$ を $\sum_i \omega_i + \sum_j y_j'$ に置き換えても，不等号の向きは変わらない。したがって，(5)を

$$p^* \sum_i \omega_i + p^* \sum_j y_j' > p^* \sum_i \omega_i + p^* \sum_j y_j^*$$

すなわち

(6) $$p^* \sum_j y_j' > p^* \sum_j y_j^*$$

と書き換えることができる。

ここで，Y_j は非空かつコンパクトであるから，生産者 j の最適選択 y_j^* は，集計的利潤最大化問題 $\max\left\{ \sum_j p^* y_j \middle| y_j \in Y_j \ \forall j \right\}$ の解でもある。よって，不等式(6)は集計的利潤最大化に矛盾するので，均衡配分 x_i^*, y_j^* は Pareto 効率的でないという主張は誤りであり，命題が証明された。(証了)

命題1が示すように，競争均衡は Pareto 効率的である。次に，競争均衡を通じる分権的な方法で，Pareto 効率的配分が得られるかどうかという逆の問題を検討しよう。実は，消費者の間の移転を認めるならば，これは成立する。

定義4 (移転を伴う競争均衡)[1]

価格ベクトル $p^* \geq 0$, $p^* \neq 0$ により支持される配分 $x_i^*(i=1,2,\dots,m)$, y_j^* $(j=1,2,\dots,n)$ は，以下の条件が満たされる場合，移転 T_i^* を伴う競争均衡である。

(i) $$x_i^* = \arg\max_{x_i \geq 0} \left\{ u_i(x_i) | p^* x_i \leq h_i^* \right\} \qquad i=1,2,\dots,m \text{ について}$$

ただし，$h_i^* = p^* \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p^* y_j^*$。

(ii) $$y_j^* = \arg\max_{y_j} \left\{ p^* y_j | y_j \in Y_j \right\} \qquad j=1,2,\dots,n \text{ について}$$

(iii) 全ての市場は均衡している。すなわち，$\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^* - \sum_i \omega_i \leq 0$。

(iv) 移転の合計は0である。すなわち，$\sum_i T_i^* = 0$。

ここで，私たちは次を証明する。

命題2 (第2厚生定理)

仮定 C1, C2, P が成立すると仮定する。この時，社会厚生関数最大化

(7) $$W(\alpha) = \max_{x_i \geq 0, y_j} \sum_i \alpha_i u_i(x_i)$$
$$\text{subject to} \quad \sum_i x_i - \sum_j y_j \leq \sum_i \omega_i$$

1) 定義4の条件(i)-(iii)は，定義2のそれらと同一である。

$$y_j \in Y_j$$

$$\alpha \in S^m = \left\{ \alpha \mid \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1 \right\}$$

は，移転を伴う競争均衡である。

（証明）

ここでは，最大化問題(7)において，定義4の条件が全て満たされることと，Lagrange 乗数 p^* は均衡価格として解釈できることを示せば十分である。

無活動の可能性が与えられた時，(7)は実行可能である。すなわち，効用関数は連続であり，Y_j はコンパクトであることが与えられると，最大化問題はコンパクトになる。また，それは凸でもあり，Slater 条件が成立する[2)]ので，Lagrange 乗数 p が存在する[3)]。全ての i について $\alpha_i > 0$ であり，効用関数は非飽和であるので，$p^* \neq 0$ が従う。(7)を制約付き最大化問題と見なして，Lagrange 関数

$$L(x, y, \alpha, p) = \sum_i \alpha_i u_i(x_i) - p\left(\sum_i x_i - \sum_j y_j - \sum_i \omega_i\right)$$

を考えることができる。ここで，最適値を上添字* で示すことにすれば，全ての $x_i \geq 0$ と全ての $y_j \in Y_j$ に対して，不等式

(8)
$$\sum_i \alpha_i u_i(x_i) - p^*\left(\sum_i x_i - \sum_j y_j - \sum_i \omega_i\right) \leq \sum_i \alpha_i u_i(x_i^*) - p^*\left(\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^* - \sum_i \omega_i\right)$$

を得る。

定義4の(i)を示すには，$i=s$ を除く全ての i に対して $x_i = x_i^*$，全ての j

2） 全ての j と，$\sum_i x_i < \sum_i \omega_i$ となるような $x_i > 0$ に対して，$y_j = 0$ と設定すれば良い。Slater 条件については，Takayama (1974) 参照。

3） Avriel (1976) 参照。

に対して $y_j = y_j^*$ と設定する。この時，(8)は，全ての $x_s \geq 0$ に対して

$$\alpha_s u_s(x_s) - p^* x_s \leq \alpha_s u_s(x_s^*) - p^* x_s^*$$

となり，両辺を $\lambda_s = \frac{1}{\alpha_s}$ 倍すると

$$u_s(x_s) - \lambda_s p^* x_s \leq u_s(x_s^*) - \lambda_s p^* x_s^* \qquad \text{全ての } x_s \geq 0 \text{ に対して}$$

を得る。これは，所得 $h_s^* = p^* x_s^*$ を持つ消費者 s の問題(1)に対応する Lagrange 不等式に他ならない。以上で，(i)が証明された。

(ii)については，全ての i に対して $x_i = x_i^*, j=s$ を除く全ての j に対して $y_j = y_j^*$ と設定すると，(8)は

$$p^* y_s \leq p^* y_s^* \qquad \text{全ての } y_s \in Y_s \text{ に対して}$$

と書き換えられるが，これは生産者 s は利潤を最大にしており，したがって $p^* y_s^* = \pi_s(p)$ であることを意味する。

(iii)の成立は自明であり，超過供給にある商品の価格が 0 になることは，相補性スラック変数により保証される。

(iv)を確認するためには，最適において

$$p^* \left(\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^* - \sum_i \omega_i \right) = 0$$

である事実を利用する。$p^* \sum_j y_j^* = \sum_i \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p^*)$ であるから，移転

$$T_i^* = p^* x_i^* - \left(p^* \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p^*) \right)$$

の総和は 0 になることが分かる。

定義 4 の条件は全て満たされるので，Lagrange 乗数 p^* を均衡価格と解釈することができる。(証了)

命題 2 は，価格 p^* の下で，Pareto 効率性は，生産者達と消費者達にとり最適であり，また両立可能である配分を作り出すことを示している。しかし，Pareto 効率性は，両立不可能な配分も作り出す。そのような価格 p^* と移転 T_i^* が与えられる場合には，各主体は自分自身で財バランスを

満たさない決定をすることができる[4)]。

4. 根岸表現

根岸は，全ての消費者が自分の予算制約を満たすような非0の厚生加重 α_i を持つ社会厚生関数の最大化を通じて，競争均衡が表されることを示した。本節では，仮定 C1, C2, P の下で根岸定理を証明する。

根岸表現は，次のような社会厚生関数の最大化問題として定義される。

定義5（根岸表現）

$$W(\alpha) = \max_{x_i \geq 0, y_j} \sum_i \alpha_i u_i(x_i)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_i x_i - \sum_j y_j \leq \sum_i \omega_i \qquad (p)$$

$$y_j \in Y_j$$

ただし，$\alpha \in S^m$ は，各消費者 i について，予算制約

$$h_i = p\omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p)$$

が成立するような厚生加重である。ここで，p は，予算制約に関係する Langange 乗数ベクトルであり，x_i は効用最大化問題における最適であり，$\pi_j(p) = \max\left\{py_j \,|\, y_j \in Y_j\right\}$ は生産者 j の利潤関数である。

命題3（Pareto 効率的配分の性質）

仮定 C1, C2, P が満たされる時，以下の性質が成立する。

(i) 全ての $p \in M^0(\alpha, \omega)$ に対して，$\alpha_i u_i(x_i^0) \geq px_i^0$ である。ただし，$M^0(\alpha, \omega)$ は Lagrange 乗数の集合である。特に，$\alpha_i = 0$ であれば，$px_i^0 = 0$ である。

4） 諸主体の行う選択一意性が保証されていないことが，その理由である。

(ii) $\alpha_i \geq 0$ であれば，あるいは $\alpha_1 > 0$ であれば，$x_i^0(\alpha, \omega)$ は連続関数である。

(iii) $\alpha_i \geq 0$ あるいは $\alpha_1 > 0$ に対して，$u_i^0(\alpha, \omega) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$ である。全ての $\alpha \in S^m$ に対して，$\alpha_i u_i^0(\alpha, \omega)$ は連続である。

(iv) $W(\alpha, \omega)$ は，α に関して1次同次である。$\alpha_i \geq 0$ あるいは $\alpha_1 > 0$ に対して，$u_i^0(\alpha, \omega)$ と $x_i^0(\alpha, \omega)$ は，α に関して0次同次である。Lagrange 乗数の対応 $M^0(\alpha, \omega)$ は，α に関して1次同次である。

(v) $0 \notin M^0(\alpha, \omega)$。

(vi) もし $\alpha_1 > 0$ であれば，財バランスは等号で成立する。

(vii) もし $\alpha_1 > 0$ であれば，全ての $p \in M^0(\alpha, \omega)$ に対して，$p > 0$ である。

（証明）

目的関数は，連続かつ凹である。仮定 P により，$y_j = 0$ は実行可能である。また，$0 \in Y_j$ であり，$x_i = 0$ も実行可能であるから，制約集合は非空である。Y_j はコンパクトであり，$x_i \geq 0$ であるから，制約集合はコンパクトである。したがって，有界な最適解が存在する。さらに，仮定 C2 により，$\omega > 0$ であるから，Slater 条件は成立し，有界な Lagrange 乗数が存在する。

(i) これを証明するには，命題2の Lagrange 不等式(8)を利用する。すなわち，全ての $x_i \geq 0$ と，全ての $y_j \in Y_j$, $p \in M^0(\alpha, \omega)$ に対して

(9)
$$\sum_i \alpha_i u_i(x_i) - p\left(\sum_i x_i - \sum_j y_j - \omega\right) \leq \sum_i \alpha_i u_i(x_i^0) - p\left(\sum_i x_i^0 - \sum_j y_j^0 - \omega\right)$$

全ての j に対して $y_j = y_j^0$ と，$i = s$ を除く全ての i に対して $x_i = x_i^0$ と設定する。この時，(9)は，全ての $x_s \geq 0$ に対して

$$\alpha_s u_s(x_s^0) - p x_s^0 \geq \alpha_s u_s(x_s) - p x_s$$

を意味する。この不等式は，$x_s = 0$ を含む全ての $x_s \geq 0$ に対して成立しな

ければならない。$u_s(0)=0$ であるから，$\alpha_s u_s(x_s^0)-px_s^0 \geq 0$ であることが分かる。ここで，$\alpha_s=0$ は $px_s^0=0$ であることを意味する。

(ii) $\alpha_i>0$ に対しては，これは，$u_i(x_i)$ の厳密な凹性から従う。最大化定理[5] により，$x_i^0(\alpha,\omega)$ の連続性が示される。$\alpha_i=0$ かつ $\alpha_1>0$ に対しては，その効用関数が全ての財に関して増加的である消費者 1 は，消費者 i に全く消費を残そうとはしないから，$x_i^0=0$ である。$\alpha_i=0$ についても消費は一意的であり，再び最大化定理により，連続である。

(iii) 前半は，包絡線定理[6] から従う。$\alpha_i u_i^0(\alpha,\omega)$ の連続性は，もし $\alpha_i>0$ であれば，上の(ii)から従う。また

$$\lim_{\alpha_i \to 0} \alpha_i u_i^0(\alpha,\omega)=1$$

であるから，$\alpha_i=0$ に対しても，$\alpha_i u_i^0(\alpha,\omega)$ は連続である。

(iv) 厚生加重を一律に何倍かしても，配分は変わらない。すなわち，$W(.)$ は ω に関して 1 次同次であり，$u_i^0(\alpha,\omega)$ と $x_i^0(\alpha,\omega)$ は ω に関して 0 次同次である。Lagrange 乗数の対応 $M^0(\alpha,\omega)$ が 1 次同次であることは，Lagrange 乗数は $W(\alpha,\omega)$ の ω に関する劣勾配であることから従う。W の ω に関する劣勾配を

(10) $$\partial_\omega W(\alpha,\omega)=\left\{p \in R^l \mid W(\alpha,\omega) \geq W(\alpha,\omega')-p(\omega'-\omega) \forall \omega' \in R_+^l\right\}$$

と定義しよう。この時，$W(\lambda\alpha,\omega)=\lambda W(\alpha,\omega)$ かつ $W(\lambda\alpha,\omega')=\lambda W(\alpha,\omega')$ であるから，もし $p \in \partial_\omega W(\alpha,\omega)$ であれば，$\lambda p \in \partial_\omega W(\lambda\alpha,\omega)$ であることが従う。

(v) これは，各消費者の効用のある財に関する増加性と，$\alpha \in S^m$ という事実から従う。

(vi) $\alpha_1 u_1(x_1)$ は全ての財に関して増加的であるから，任意の財のバランス

5) Takayama (1974, Theorem 2. D. 14) 参照。
6) Takayama (1974, Theorem 1. F. 4) 参照。

において厳密な不等号を持つ配分は，最適ではあり得ない。

(vii) 与えられた財 h について劣微分(10)を考え，全ての $k \neq h$ については $\omega'_k = \omega_k$ を，そして $\omega'_h > \omega_h$ を選択する。$\alpha_1 u_1(x_1)$ は全ての財に関して増加的であるから，$W(\alpha, \omega') > W(\alpha, \omega)$ である。しかしこの時，p が劣勾配であるためには，p_h は(10)において正でなければならない。（証了）

以上の準備の後に，根岸定理を証明する。

命題 4（根岸定理）

仮定 C1，C2，P が成立するとしよう。成立する配分が一般競争均衡となるような，社会厚生関数の厚生加重 $\alpha^* \in S^m$ が存在する。

（証明）

定義 5 の最大化問題を考える。この制約集合は有界であり，Slater 条件を満たしている。証明は命題 3 を利用して，2 段階で行われる。最初に，不動点対応を構築して，不動点が存在することを証明する。次に，その不動点において，定義 2 の条件が全て満たされることを示す。

段階 1：不動点対応の構築

Lagarange 乗数を与える対応と，厚生加重を改訂する関数を定義して，不動点写像を構築する。

$M^0(\alpha)$ で与えられる対応 $M^0{:}A \to \overline{M}$ を考える。ただし，$A(=S^m)$ は厚生加重の集合であり，$\overline{M}$ は計画の Lagarange 乗数の集合 $M^0(A) = \{p | p \in M^0(\alpha), \alpha \in A\}$ の凸包である。命題 3 の(iv)により，α が単体の上に存在するように制限しても，配分は影響されない。(v)により，$0 \notin M^0(\alpha, \omega)$である。最大化定理により，この対応は A において上半連続であり，またコンパクト，凸値である。

$h(\alpha, p)$ により与えられる連続関数 $h{:}A \times \overline{M} \to A$ は，厚生加重を以下のように改訂する。各 $\alpha \in A$ に対して，消費者 i の支出を連続にするために，

先ず，関数

$$e_i(\alpha,p)=\min\{px_i^0(\alpha),\alpha_i u_i(x_i^0(\alpha))\}$$

を定義する。これは，(ii)と(iii)により，全ての α に対して連続である。次に，α_i の現在の値を $\hat{\alpha}_i=\alpha_i$ として記憶し，予算余剰 $s_i(\alpha,p)=\max\{p\omega_i+\sum_j\theta_{ij}\pi_j(p)-e_i(\alpha,p),0\}$ が大きい時には α_i を大きくするというように改訂して，α_i の新しい値を得る。すなわち

(11) $$\alpha_i=\mu(\hat{\alpha}_i+\delta s_i)$$

ただし，δ は正の定数であり，μ は $\sum_i\alpha_i=1$ となるようなスカラーである。少なくとも 1 つの $\hat{\alpha}_i$ は正であるので，このようなパラメーターを見付けることは常に可能である。また，$\pi_j(p)$ と $e_i(\alpha,p)$ は連続であるから，$s_i(\alpha,p)$ は連続であり，(11)は連続関数 h を定義する。

Lagarange 乗数対応 $M^0(\alpha)$ と，関数 $h(\alpha,p)$ は，対応 $G:C\to C$ を定義する。ただし，$C=A\times\overline{M}$ である。パラメーター集合 C は，コンパクトかつ凸であるから，G は C において上半連続である。したがって，角谷定理により，不動点 $(\alpha^*,p^*)\in C$ が存在する。

段階 2：不動点は均衡である

不動点においては

(12) $$\alpha_i=\mu(\alpha_i+\delta s_i)$$

である。私たちは，α_1 から始めて，全ての α_i は正であることを証明する。$\alpha_1=0$ と仮定しよう。この時，(12)より，$s_1=0$ である。$0\notin M^0(\alpha,\omega)$ であるから，ある p_k は正であることが分かっている。仮定 C2 により，消費者 1 の賦存量は正であるから，消費者 1 の所得は正である。(i)により，価格 p は，この不動点において Lagrange 乗数となるから，$e_i(\alpha,p)=px_i$ が成立する。$s_1=0$ であるから，$px_1=0$ でなければならない。しかし，(i)により，$\alpha_1=0$ は $px_1=0$ を意味するので，矛盾する。すなわち，均衡では $\alpha_1>0$ であり，(vii)によって，全ての p_k は正である。全ての消費者は正の所得を持ち，消費者 1 と同じ理由によって，全ての消費者の厚生加

重は正である。

次に，予算余剰 s_i は全ての i について0であることを示そう。(vi)により，財バランスは，等号で成立しなければならない。しかも，価格 p において，全ての消費者が正の予算余剰を持つことはできないので，ある消費者の余剰は0でなければならない。しかし，この時，全ての i について予算余剰が0であるには，(12)において $\mu=1$ が成立しなければならない。

以上で，根岸均衡の存在，すなわち予算余剰が0である社会厚生最大化問題の解の存在が証明された。命題2により，これは一般競争均衡である。最後に，予算余剰は0であるから，一括移転の必要はない。（証了）

根岸定理の内容を直観的に理解するために，生産の行われない2消費者の交換経済を考えよう。

(13)
$$\max_{x_1\geq 0,\, x_2\geq 0} \alpha_1 u_1(x_1)+\alpha_2 u_2(x_2)$$
$$\text{subject to} \qquad x_1+x_2 \leq \omega_1+\omega_2 \qquad (p)$$

ただし，$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$，$\alpha_1+\alpha_2=1$ であり，p は Lagrange 乗数を表す。

各 (α_1, α_2) に対して，解 (x_1, x_2) は一意的である。同時に，もし命題3の(vii)が成立するとすれば，p は一意的であり，$\alpha_1>0$ に関して $p(\alpha)$ は連続関数である。それゆえに，各消費者の予算制約は

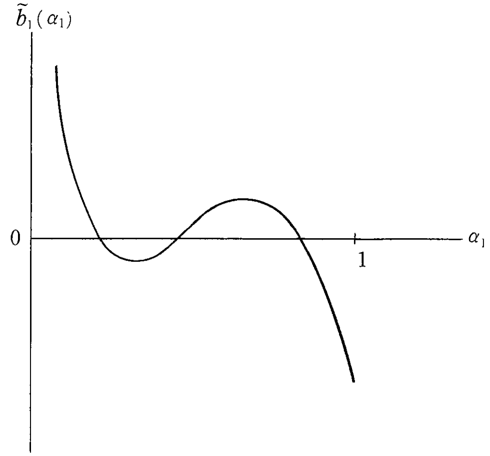
$$b_i(\alpha_1, \alpha_2)=p(\alpha_1, \alpha_2)\omega_i - p(\alpha_1, \alpha_2)\, x_i(\alpha_1, \alpha_2) \qquad i=1, 2$$

である。

もし $\alpha_1=0$ であれば，消費者1は重要ではなくなり，(13)の解は，命題3の(i)によって $px_1(\alpha)=0$ と $px_2(\alpha)=p(\omega_1+\omega_2)$ となり，したがって $b_1(\alpha_1, \alpha_2)>0$ である。連続性により，正のしかし小さな値の α_1 に対しても，$b_1(\alpha_1, \alpha_2)$ は正ではあるが，0に近い値を取る。同様に，1に近い α_1 に対しては，$b_1(\alpha_1, \alpha_2)$ は負になる。$b_1(\alpha_1, \alpha_2)$ は連続であるから，$b_1(\alpha_1, \alpha_2)=0$ となる (α_1, α_2) の値が存在する。$p(x_1+x_2)=p(\omega_1+\omega_2)$ で

あるから，必然的に $b_2(\alpha_1, \alpha_2)$ も 0 に等しくなる。この様子は，超過予算関数 $\tilde{b}_1(\alpha_1) = b_1(\alpha_1, 1-\alpha_1)$ を描いた図に示されている。したがって，均衡は有界な開区間 (0, 1) の上に存在する。

図：2 消費者の交換経済における超過予算関数 $\tilde{b}_1(\alpha_1)$



参　照　文　献

Avriel, M., (1976), *Nonlinear Programming,* Prentice Hall.

Arrow, K. J., and G. Debrue (1954), "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica* 22.

Arrow, K. J., and F. H. Hahn (1971), *General Competitive Analysis,* Holden Day（福岡正夫，川又邦雄訳『一般均衡分析』岩波書店，1976）

Debreu, G., (1959), *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium,* Wiley（丸山徹訳『価値の理論』東洋経済新報社，1977）

Gale, D., (1955), "The Law of Supply and Demand," *Mathematics Scandinavica* 3.

McKenzie, L. W., (1954), "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems," *Econometrica* 22.

McKenzie, L. W., (1959), "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market," *Econometrica* 27.

McKenzie, L. W., (1981), "The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium," *Econometrica* 49.

Negishi, T., (1960), "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica* 12.

根岸隆 (1965),『価格と配分の理論』東洋経済新報社。

Nikaido, H., (1956), "On the Classical Multilateral Exchange Problem," *Metroeconomica* 8.

Nikaido, H., (1957), "A Supplementary Note to 'On the Classical Multilateral Exchange Problem,'" *Metroeconomica* 9.

Takayama, A., (1974), *Mathematical Economics,* Dryden Press.

Wald, A. (1934–35), "Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre," *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 7.

Walras, M. E. L., (1874-77), *Éléments d'économie politique pure* (English translation by W. Jaffé, *Elements of Pure Economics,* Allen and Unwin, 1954)（久武雅夫訳『純粋経済学要論』岩波書店，1983）