王朝モデル：無限計画視野の一般均衡

小　平　　裕

1. はじめに

私たちは，前稿（小平 (1998)）において，一般均衡モデルの根岸表現を取り上げ，均衡の存在証明を与えた。本稿では，この枠組みを拡張して，時間の流れを取り入れ，計画視野 time horizon が無限大である場合を考察したい。

一般均衡モデルでは，通常，消費者と生産者という 2 種類の経済主体が想定される。生産者については，これを企業と考えれば，無限の寿命を想定することも不自然ではない。一方，消費者については，計画視野の長さが有限から無限に延長される場合に，寿命も無限になると考えると不自然さが生じるので，多少の工夫が必要となる。無限計画視野を表すモデルは，消費者の寿命についての想定によって，王朝モデル dynasty model と重層世代モデル overlapping generations model の 2 種類に分けられる。

王朝モデルは，1 人 1 人の消費者の寿命を無限であると考えるが，消費者の数は有限であると想定する。各消費者は，無限の長さの生涯にわたる富制約の下で，生涯効用を最大にするように行動する。

重層世代モデルは，王朝モデルとは対照的に，1 人 1 人の消費者の寿命は有限であると考えて，各時点には有限の数の，年齢の異なる消費者がいると想定する。そして各世代は重なり合っていると仮定する。したがって，計画視野を通じると，モデルには無数に多くの消費者がいることになる。このモデルでは，各世代が互いの効用を予測しながら，将来世代に遺産を残す（あるいは将来世代から借り入れる）無限の寿命を持つ家族が説明され

る。各家族の富制約は，無限計画視野にわたる。

両モデルは数学的構造のみならず，経済的意義も異なる。本稿では，王朝モデルを考察することにして，重層世代モデルの考察は別の機会に譲る。本稿の構成は，以下の通りである。先ず，無限計画視野の王朝モデルが，各消費者が自分の異時点間予算制約を満たすような根岸計画として定式化できることを示し（第2節），この計画に厚生加重が存在することを証明する（第3節）。すなわち，所与の厚生加重（根岸加重）を持つ異時点間厚生最大化問題の検討から分析を始め，次に予算制約を導入して，これらの制約を満たすように加重を調整する。最後に，有限計画視野モデルの場合と同様に，この解は競争均衡であり，したがって Pareto 効率的であることを証明する（第4節）。

2. 根岸表現による王朝モデル

無限計画視野問題では，消費者の効用関数 $u_{it}(.)$ や賦存量 ω_{it}，生産者の変形関数 $F_{jt}(.)$ は，時間に依存するものとして期間の数だけ存在する。すなわち，それらの数は無限になり，分析を困難にする1つの原因となっている。これらの数を有限にすることができれば，分析はずっと容易になる。そのために，無限の寿命を持つ消費者の効用関数を帰納的に表すことにする。変形関数については，その調整を資本ストック k_{jt} の蓄積として表すこと，企業毎に技術を分けないことにすれば，その数を有限に留めることができる。ただし，k_{jt} の次元を適当に（例えば，労働を含むように）拡張する必要がある。賦存量については，一般性を失うことなく，集計的純供給 y_t に総賦存量 $\sum_{i}\omega_{it}$ を含めることができる[1)]。

分析を行い易くするための以上の工夫を施すと，無限計画視野の異時点

1） もし王朝は継続する世代によって構成されていると解釈するならば，各世代は賦存量を無償で得るのに対して，資本ストックは購入しなければならないので，賦存量と資本ストックを区別する必要がある。

間効用最大化問題は次のように表される。与えられた初期資本ストック $\tilde{k}_1$ に対して

(1)
$$\max_{x_{it}\geq 0,\, u_{it},\, \forall i,\ k_t,\, \tilde{k}_{t+1}\geq 0,\, y_t,\, t=1,2,\ldots} \sum_i \alpha_i u_{i1}$$

$$\text{subject to} \quad u_{it} = W_i(x_{it}, u_{i,t+1})$$
$$F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0$$
$$k_t \leq \tilde{k}_t$$
$$\sum_i x_{it} - y_t \leq 0$$

異時点間効用最大化問題(1)は，無限の数の商品と，無限の数の商品バランスを含む無限次元空間において定義されているので，標準的な Lagrange 乗数理論をこれにそのまま適用することはできない。

さらに，(1)の解は有界でない可能性がある。k_t が与えられた時，y_t，$\tilde{k}_{t+1}$（したがって全ての x_{it}）は，明らかに有界であるが，蓄積を通じて k_t の一部の成分は無限大になる可能性がある。またこのことから，目的関数が非有界になる可能性がある。目的関数が非有界である場合には，根岸表現による証明において必要とされる予算赤字を計算することはできない[2)]。次の仮定は，この事態を回避する。

仮定 CD1（王朝効用関数）

(i) W_i: $R^r_+ \times R \to R$, $W_i(x_i, u_i)$ は，連続，厳密に凹，$R^r_{++} \times R$ の上で連続微分可能である。

(ii) $W_i(x_i, u_i)$ は，x_i に関して非飽和であり，i=1 について x_i に関して増加的である。

2) 目的関数が非有界である場合には，配分同士を厚生比較することもできない。この時には，より精緻な最適性概念が必要である。例えば，Carlson and Haurie (1987) を見よ。

(iii) $W_i(0, 0)=0$

(iv) 割引

全ての i について共通な，ある与えられた $\gamma \in (0, 1)$ に対して，

$0 < \frac{\partial W_i(\cdot)}{\partial u_i} \leq \gamma$

(v) $W_i(x_i, u_i)$ は，上界 $\bar{v}$ によって一様有界である[3)]。

初期ストックに関する次の仮定 CD2 は，全ての消費者が正の所得を持つことを保証する。

仮定 CD2（初期ストック）[4)]

第 1 期には，各消費者 i は非負かつ非 0 の初期ストック $\tilde{k}_{i1} \geq 0$, $\tilde{k}_{i1} \neq 0$ と，そのベクトルの第 1 成分（例えば労働）の正のストック $\tilde{k}_{i1,1} \geq 0$ を持つ。$\sum_i \tilde{k}_{i1}$ を $\tilde{k}_1$ と書く。

変形関数に関する次の仮定 PD は，収穫は規模に関して不変であること，初期資本ストックから出発して正の消費が可能であるような資本ストック水準に到達できること，どの資本ストックも涸渇しない（持続可能性）ことを仮定する。

仮定 PD（変形関数）

(i) $F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t)$ は，凸，$(y_t, \tilde{k}_{t+1}, -k_t)$ に関して非減少的，$-k_{1t}$ に関して増加的である。ただし，k_{1t} は第 t 期における資本財 1（例えば，労働）の集計的ストックを表す。

制約 $F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0$ は，以下の性質を満たす。

(ii) 1 次同次性

3) 一様有界性は，有限計画視野近似を容易にするために仮定される。

4) 前稿（小平 (1998)）の賦存量に関する仮定 C2と同値である。

もし $F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0$ であれば，任意の $\lambda > 0$ に対して，$F(\lambda y_t, \lambda\tilde{k}_{t+1}, \lambda k_t) \leq 0$ が成立する。

(iii) 有界性

任意の与えられた有界な k_t に対して，y_t と $\tilde{k}_{t+1}$ は上から有界である。そして

(iv) 集合 $M = \{k > 0 \mid F(y, k, k) < 0, y > 0\}$ は非空である。

(v) 値 $k \in M \cap (0, \tilde{k}_1)$ が存在する。ただし，$\tilde{k}_1$ は初期ストックである。

仮定 PD において，もし k_{1t} が増加するならば，(i)により，産出量が増加する財は，少なくとも 1 つはある。したがって，初期ストック $\tilde{k}_{11} = \sum_i \tilde{k}_{i1,1}$（労働）の影の価格は正になり，（仮定 CD2 により）全ての消費者は正の所得を持つ。(ii)は，ストック k_t を λ 倍 $(\lambda > 0)$ することは，純産出量 y_t とストック $\tilde{k}_{t+1}$ も λ 倍に増やすことになることを意味する。つまり，(ii)は，各期 t において，産出物の価値はストック投入物の価値に等しく，諸要素への報酬として完全分配されることを保証する。(iii)は，k_t が有界である限り，全ての t について，産出物の価値は有界であることを意味する。(iv)は，技術は一定量の全商品を何時までも生産することを可能にすることを保証し，(v)は，利用可能な初期ストック $\tilde{k}_1$ はこの水準に達するのに十分であることを保証する（したがって，最大化問題(1)の制約集合には，厳密な内部がある）。

3. 根岸均衡の存在

仮定 CD1では，割引率は消費者によって異なると想定されるので，無限計画視野問題を動的計画法で表すことはできない。代わりに，Lucas and Stokey (1984) にしたがい，1 期間計画の点列を定義して，無限計画視野問題を有限計画視野問題の点列に帰着させよう。すなわち，各期の計画のそれぞれにおいて，第 t 期になされた決定の将来効用と将来資本ストック

に対する効果は全て，$(u_{i,t+1}, \forall i, \tilde{k}_{t+1}) \in G_{t+1}$という条件により表される。

ここで，集合 G_{t+1} が凸計画法[5] で必要な諸性質を持つことを示す必要がある。問題(1)は，次のように書き換えられる[6]。

$$
(2) \qquad V(\alpha, \tilde{k}_t, n) = \max_{x_{it} \geq 0, u_{i,t+1}, \forall i, k_t,\ \tilde{k}_{t+1} \geq 0} \sum_i \alpha_{it} n_i W_i \left(\frac{x_{it}}{n_i}, \frac{u_{i,t+1}}{n_i} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{subject to} \quad & F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0 \\
& k_t \leq \tilde{k}_t && (\psi_t) \\
& \sum_i x_{it} - y_t \leq 0 && (p_t) \\
& (u_{i,t+1}, \forall i, \tilde{k}_{t+1}) \in G_{t+1}
\end{aligned}
$$

問題(2)において，集合 G_{t+1} は次のように定義される[7]。

$$
G_{t+1} = \left\{ (u_{i,t+1}, \forall i, k_{t+1}) \left| \begin{array}{c} u_{i,t+\tau} \leq W_i(x_{i,t+\tau}, u_{i,t+\tau+1}), \\ F\left(\sum_i x_{i,t+\tau}, k_{t+\tau+1}, k_{t+\tau} \right) \leq 0 \\ x_{i,t+\tau} \geq 0, \\ k_{t+\tau+1} \geq 0, \\ u_{i,t+\tau+1} \geq 0, \tau = 1, 2, \ldots \end{array} \right. \right\}
$$

また，全ての i について，n_i=1 である。α_{it} は，第 t 期の与えられた正の厚生加重である。

問題(2)は，このように，1 期間計画の点列を定義する。以下において，各消費者の支出は第 1 期の最大化問題から賄うことができること，した

5) Avriel (1976, pp. 95-100) 参照。
6) 割引要素が固定されている場合と異なり，厚生加重は時間に依存する。したがって時間の添字が付く。第 t 期に解かれる計画に対する厚生加重のベクトルとして，α_t を利用する。ただしその成分は α_{it}である。
7) 集合 G_{t+1} において，y_t に $\sum_i x_{it}$ を，$\tilde{k}_{t+1}$ に k_{t+1} を代入する。また，制約条件に不等号を付けて，$u_{i,t+\tau} \leq W_i\ (x_{i,t+\tau}, u_{i,t+\tau+1})$と書くが，任意の最適においては等号が成立する。

がって第1期の問題にだけ注目すれば良いことが分かる。

命題1（王朝根岸均衡の存在）

仮定 CD1，CD2，PD が成立するとしよう。この時，最大化問題(2)の解が予算赤字0を生み出すような正の厚生加重 α_{i1}^* が存在する。

（証明）

証明は3つに分かれる。(I)では，問題(2)の集合 G_2 が非空，コンパクト，凸であり，したがって(2)は標準的な凸計画であることを示す。次に(II)ではこれを利用して，(III)で必要とされる予算赤字関数を導く。(III)では，予算赤字関数を使い，根岸定理（前稿命題4）と同じように厚生加重を調整するための写像を定義する。

(I) G_2 は，非空，コンパクト，凸集合である。t=2 に対して，全ての $x_{i,t+\tau}$，$u_{i,t+\tau}$，$k_{t+\tau}$ について0という値は実行可能であるから，非空性は自明である。x_{i1} の有界性は，仮定 PD(iii)から従う。u_{i2} の有界性は，仮定 CD1(v)から従う。凸性を証明するために，G_2 に属する t=1と $\tau = 1, 2, \ldots$ について2つの異なる点列 $\{x_{i,t+\tau}, u_{i,t+\tau}, k_{t+\tau}\}$ を考えよう。各制約は有限の数の変数を持ち，凸であるから，各 τ について各制約を別々に確認できるように，任意の凸結合もまた G_2 に属する。それ故に，その集合も凸である。閉性の証明は技術的であり，ここでは省略する。Lucas and Stokey（1984，補助命題1）を見よ。

したがって，(2)は，厳密に凸である目的関数と，非空，コンパクト，凸の制約集合 G_2 を持つ凸計画である。よって，解が存在する。価値関数は有界，連続である。摂動定理により，価値関数は凸，α に関して増加的，k_1 と n に関して凹である。仮定 PD(iv)(v)により，実行可能集合には厳密な内部がある。したがって，Lagrange 乗数 $\psi_1 \in \Psi_1(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)$ を定義することができる（$\Psi_1(\cdot)$ は，制約 $k_1 \leq \tilde{k}_1$ に関わる Lagrange 乗数の集合である）。

(II) 予算赤字を導出するために，最初に Kehoe (1991) にしたがって消費

者支出を計算し，有限の数の変数を持つ連続関数として表す。消費者支出は，静学モデルにおいては，Euler 条件[8)]によって，全支出マイナス消費者余剰として定義され

$$px_t = \alpha_i \tilde{u}_i (x_i, n_i) - \alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_i (x_i, n_i)}{\partial n_i}$$

と表わされた。王朝モデルでは，これは

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t x_{it} = \alpha_{i1} u_{i1} - \alpha_{i1} \frac{\partial \left(n_i W_i \left(\frac{x_{i1}}{n_i}, \frac{u_{i2}}{n_i} \right) \right)}{\partial n_i}$$

と表される。仮定 CD1(i)により，W_i は厳密に凹であり（したがって最適な x_{i1}と u_{i2} は一意的である），連続微分可能である。包絡線定理[9)]により，価値関数 $V(.)$ は α と n に関して連続微分可能であり，これは以下を与える。

$$\frac{\partial V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)}{\partial \alpha_{il}} = u_{i1}$$

$$\frac{\partial V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)}{\partial n_i} = \alpha_{i1} \frac{\partial \left(n_i W_i \left(\frac{x_{il}}{n_i}, \frac{u_{i2}}{n_i} \right) \right)}{\partial n_i}$$

したがって，消費者 i の予算赤字関数は，与えられた $\psi_1 \in \Psi_1 (\alpha_1, \tilde{k}_1, n)$ に対して

$$b_i (\alpha_1, \bar{k}_1, n, \psi_1) = \alpha_{i1} \frac{\partial V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)}{\partial n_i} - \psi_1 \tilde{k}_{i1} \tag{3}$$

である。ただし，$\bar{k}_1$ は消費者達により所有される初期ストックのベクトル $(\tilde{k}_{11}, \tilde{k}_{21}, \ldots, \tilde{k}_{i1}, \ldots, \tilde{k}_{m1})$ を表している。再び，包絡線定理により，(3)の右辺の最初の 2 つの項は，$(\alpha_1, \bar{k}_1, n)$ に関して連続である。第 3 項は明らかに ψ_1 に関して連続である。よって，b_i は連続である。

また，$V(.)$ は α_1 に関して 1 次同次であり，$(\tilde{k}_1, n)$ に関して 1 次同次

8) Takayama (1974, p. 426) 参照。
9) Takayama (1974, Theorem 1.F.4) 参照。

である。したがって，Euler 条件と Kuhn–Tucker 条件[10] は，（仮定 PD の同次性を使うと）全ての $\psi_1 \in \Psi_1(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)$ に対して

$$V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n) = \sum_i \alpha_i \frac{\partial V(\alpha, \tilde{k}_1, n)}{\partial \alpha_i}$$

$$V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n) = \sum_i n_i \frac{\partial V(\alpha, \tilde{k}_1, n)}{\partial n_i} + \psi_1 \tilde{k}_1$$

を意味する[11]。全ての i に対して n_i=1 であり，$\psi_1 \tilde{k}_1 = \psi_1 \sum_i \tilde{k}_{i1}$ であるから，全ての正の α_{i1} に対して

$$\sum_i b_i\ (\alpha_1, \bar{k}_1, n) = 0$$

が従う。すなわち，予算赤字 $b_1\ (\alpha_1, \bar{k}_1, n, \psi_1)$ は，連続関数であり，α_1 に関して 1 次同次である。また，全ての $\psi_1 \in \Psi_1(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)$ に対して，$\sum_i b_i = 0$ である。

(III) 以上で，根岸定理（小平（1998，命題 4））の証明手順を利用する準備が整った。すなわち，この問題(2)に，根岸均衡，すなわち予算赤字 0 の解を生み出すような α_{i1} が存在することを示すことができる（ここで，$\bar{k}_1$ と n は変化しないので，予算赤字は α_1 と ψ_1 のみの関数になる）。仮定 CD2と仮定 PD(i)は，均衡の α_{i1} が正であることを保証する。消費者 1 の効用は全ての商品について増加的であるので，全ての価格も正である。（証了）

命題 1 は，均衡根岸加重を見付けることができることを示している。それらの加重を使えば，t=1 の問題(2)から，全ての i について x_{i1}と u_{i2} の均衡値を，そして $\tilde{k}_2$ と y_1 の均衡値を，そして関係する Lagrange 乗数として価格 p_1 と ψ_1 の均衡値を計算することができる。t>1 についての配分

10) Kuhn and Tucker (1951), Guignard (1969) 参照。

11) ここでは，$V(\alpha_1, \tilde{k}_1, n)$ の $\tilde{k}_1$ に関する微分可能性を仮定していないので，一般化された形の Euler 条件が必要である。もし微分可能であれば，$\psi_1 = \frac{\partial V}{\partial \tilde{k}_1}$ となり，標準的な形の Euler 条件が利用できる。

と価格を計算するには，t=2, 3,... についての問題(2)の点列を解くことが必要である。さらに，このように得られた点列が競争的王朝均衡であることを証明する必要がある。

4. 王朝競争均衡の存在と効率性

私たちは王朝均衡を次のように定義する。

定義（王朝競争均衡）[12]

ζ_t の任意の有界点列に対して $\sum_i p_t^* \zeta_t < \infty$ となるような，価格ベクトル ψ_1^* と $p_t^* \geq 0$，t=1, 2,... によって支持される配分 k_1^*，y_t^*，x_{it}^*（すべての i について）は，もし以下の条件が満たされるならば，王朝競争均衡である。

(i) $(k_1^*, y_1^*, y_2^*, ...)$ は以下の最適解である。

$$\max_{k_t,\, \tilde{k}_{t+1} \geq 0,\, y_t,\, t=1,2,\ldots} \sum_{t=1}^{\infty} p_t^* y_t - \psi_1^* k_1$$

$$\text{subject to} \qquad F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0$$

$$k_{t+1} \leq \tilde{k}_{t+1}$$

(ii) 各消費者 i に対して，$(x_{i1}^*, x_{i2}^*, ...)$ は以下の最適解である。

$$\max_{x_{it} \geq 0,\, u_{it},\, \forall i,\, t=1,2\ldots} u_{i1}$$

$$\text{subject to} \qquad u_{it} = W_i(x_{it}, u_{i,t+1})$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t^* x_{it} \leq \psi_1^* \tilde{k}_{i1}$$

(iii) t=1, 2,... について，市場は均衡している。

---

12) この定義では，最適値は有界であり達成されると仮定して，演算子 “max” を使っている。仮定 CD1, CD2, PD の下では，この条件は満たされることが後に分かる。収穫不変の下で操業している生産者は，均衡においては生産規模について無差別であり，規模は消費者需要と初期ストックにより決定される。

$$\sum_i x_{it}^* - y_t^* \leq 0 \qquad\qquad p_1^* \geq 0$$

$$k_1 \leq \tilde{k}_1 \qquad\qquad \psi_1^* \geq 0$$

王朝競争均衡の定義の条件(i)は，賦存量として $\tilde{k}_1 = \sum_i \tilde{k}_{i1}$ を所有する消費者達から，生産者は価格 ψ_1 で初期資本ストック k_1 を賃借しなければならないことと，第2期以降，全てのストックは生産者問題の変数であることを教える。規模に関して収穫不変である（仮定 PD(ii)）ので，消費者達に分配されるべき利潤はない。(ii)では，消費者 i は，$\psi_1 \tilde{k}_{i1}$ に等しい総富を持ち，全計画視野にわたる支出をこの範囲に抑えるという異時点間予算制約を持つ。(iii)において，市場均衡が特定される。すなわち，生産者問題から取り出された第1期の資本ストックに関する制約（式(2)と比較せよ）が，市場均衡条件として扱われる。均衡においては，生産者が(i)において計算する資本需要 k_1 が，$\tilde{k}_1$ を上回ることのないような水準の価格 ψ_1 が成立する。

命題2は，王朝根岸均衡から得られる配分を，定義の王朝競争均衡に関係付ける。

命題2（王朝競争均衡の存在と効率性）

仮定 CD1，CD2，PD が成立するとしよう。この時，王朝根岸均衡は王朝競争均衡であり，Pareto 効率的である。

（証明）

存在：私たちは，厚生最適は競争均衡であることを証明した静学の場合の命題（小平（1998，命題2））と同様に，証明することができる（ただし，移転はここでは命題1により0になる）。ここでは証明を与えず，Debreu (1954) の無限次元商品空間に関する第2厚生定理に依存する（ここでは，無限次元は，無限計画視野によるものである）。仮定 PD(iv)(v)は，その計画の実行可能

集合に厳密な内部があることを保証する。これは，Slater の制約条件[13)]のように，「Lagrange 乗数」(ここでは，線形汎関数 $\phi(\cdot)$) が存在し，消費者 i の異時点間支出を $\phi(x_{i1}, x_{i2}, \ldots)$ として，利潤を $\phi(y_1, y_2, \ldots)$ として計算できることを意味する。Prescott and Lucas (1972) は，問題(2)の点列により生み出される価格 p_t は，この線形汎関数を構築するのに利用できることを示している[14)]。

効率性：この均衡は，全ての消費者について正の加重を持つ厚生計画から得られるので，Pareto 効率性は自明である。(証了)

参照文献

Avriel, M., (1976), *Nonlinear Programming,* Prentice Hall.

Carlson, D. A., and A. Haurie (1987), *Infinite Horizon Optimal Control,* Springer-Verlag.

Debreu, G., (1954), "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 40: 588-92.

Guignard, M., (1969), "Generalized Kuhn-Tucker Conditions for Mathematical Programming Problems in a Banach Space," *SIAM Journal of Control Optimum* 7: 232–41.

Kehoe, T. J., (1991), "Computation and Multiplicity of Equilibria," W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 4, North-Holland.

小平裕 (1998),「一般均衡モデルの根岸表現と存在証明」, 成城大学『経済研究』第143号, 171-88。

Kuhn, H. W., and A. W. Tucker (1951), "Nonlinear Programming," *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probability,* 481-92.

Lucas, R. E., and N. L. Stokey (1984), "Optimal Growth with Many Consumers," *Journal of Economic Theory* 32: 139-71.

Negishi, T., (1960), "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica* 12.

根岸隆 (1965),『価格と配分の理論』, 東洋経済新報社。

13) Avriel (1976) 参照。

14) Lucas and Stokey (1984) の証明も，同じ結果を利用している。

Prescott, E. C., and R. E. Lucas (1972), "A Note on Price System in Infinite Dimensional Space," *International Economic Review* 13: 416-22.
Takayama, A., (1974), *Mathematical Economics,* Dryden Press.