純粋交換の重層世代モデル：無限計画視野の一般均衡

小　平　　裕

1.　はじめに

本稿では，計画視野が無限大である場合の一般均衡モデルの1つとして，重層世代モデル overlapping generations model を取り上げる。これは，前稿（小平 (1999)）で検討した王朝モデルとは，消費者の取り扱いにおいて対照的である。すなわち，王朝モデルでは，1人1人の消費者の寿命は無限であると考えられ，消費者の数は有限であると想定された。一方，重層世代モデルでは，1人1人の消費者の寿命は有限であると考えられ，各時点には有限の数の，年齢の異なる消費者がいると想定される。そして各世代は重なり合っていると仮定され，したがって計画視野を通じると，モデルには無数に多くの消費者がいることになる。

消費者のライフサイクルをこのように考えることによって，重層世代モデルでは貯蓄のより自然な取扱いが可能になり，また外生的な人口統計学変数を容易に組み入れることができるようになる。静学的な競争モデルにおいては，消費者は自分自身の消費のみから効用を引き出し，遺産を全く残さない。また，王朝モデルでは，消費者達は自分の両親とは重なり合わず，自分の子供達の効用を完全に正確に予想する個人の連鎖と考えられている。これに対して，重層世代モデルでは，各世代が互いの効用を予測しながら，将来世代に遺産を残す（あるいは将来世代から借り入れる）無限の寿命を持つ家族が説明される。

本稿では，重層世代モデルの特徴を明らかにするために，生産が行われない純粋交換経済を取り上げる。生産が行われ，貯蓄を資本財に投資可能

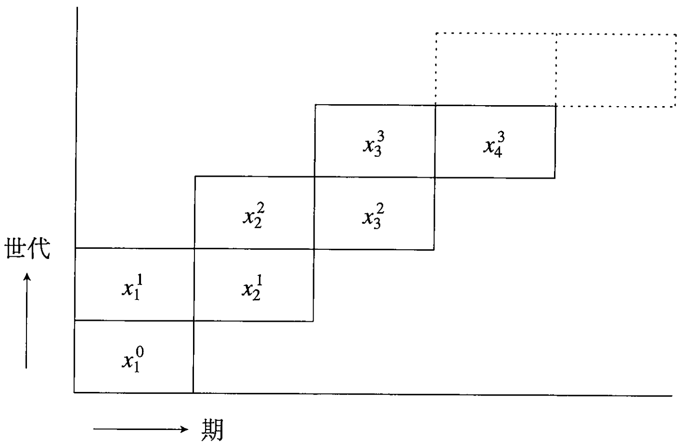
な経済の重層世代モデルの検討は，将来の課題としたい。最初に，モデル構造を説明しながら，請求権の意味を検討する（第 2 節）。続いて，均衡の存在（第 3 節），非効率性（第 4 節），不確定性（第 5 節）を調べる。

2. 請求権の区別

消費者は，若年期と老年期の 2 期間生きるものとしよう。各消費者は，生涯予算制約を満たしながら，自分の若年期に働き，老年期に向けて貯蓄する。したがって，各期 t には世代の異なる消費者が共存しており，このような消費者の重なり合いが，無限に継続すると想定される。

世代をその誕生年によって呼ぶことにすれば，モデルの構造は，重層する世代の消費を階段状に配した図に表すことができる。期間 $t=1, 2, \ldots$ の消費は x_t^{t-1}, x_t^t によって示される。ただし，上付き添え字は世代を，下付き添え字は消費の行われる期間を表すものと約束する。例えば，x_t^{t-1} は第 $t-1$ 世代の第 t 期（すなわち，老年期）の消費である。特に，モデルが始まる第 1 期 $(t=1)$ には，この期に生まれた第 1 世代の若年期消費に加えて，$t=0$ に生まれた第 0 世代の老年期消費があるものとする。

図：モデルの構造



第 0 世代は，請求権 M^0 と商品賦存量 ω_1^0 を持ち，第 1 期の市場に参加する。彼は，若年期消費 x_0^0 を過去から引き継いだ与件として以下の問題を解き，自分の最適な第 1 期消費 x_1^0 を求める。

(1) $$\max_{x_1^0 \geq 0} u\left(x_0^0, x_1^0\right)$$
$$\text{subject to} \qquad p_1 x_1^0 \leq M^0 + p_1 \omega_1^0$$

ここで，請求権 M^0 の意味を考えよう。純粋交換モデルにおいては，貯蓄をある期から次の期に持ち越すことができる物理的資本財へ投資することはできないので，貯蓄は全て金融請求権として表されなければならない[1)]。第 0 世代が若年期（第 0 期）に行った貯蓄と解釈することも可能なこの請求権 M^0 は，第 1 世代に売却可能な商品（例えば，資本財）に基づかない，または第 0 世代と第 1 世代との間の明示的な契約に基づかない金融資産である。このような請求権の存在は，有限の長さの期間にわたって Warlas 法則を損ない，存在証明には多少の工夫を必要とする。各世代が蓄積した貯蓄の移転の仕方によって，純粋交換重層世代モデルを分類できる。すなわち

(i) M^0 は，$p_1 m^0$ に等しい。ただし，m^0 は，与えられた商品ベクトルである（実物請求権）。

(ii) M^0 は，固定された金額である（名目請求権[2)]）。

(iii) M^0 は，政府が第 1 世代に課す直接税であり，第 1 世代は将来世代に対して請求権を持つ。

1) もし生産が行われ，物理的資本ストックの蓄積を伴うならば，請求権は第 0 世代が所有する資本ストックの価値と一致する。第 1 世代は，自分の若年期にそれらを第 0 世代から購入し，老年期に第 2 世代に売却する。もし請求権が物理的資本に基づくものであれば，年長世代が若年世代に，生産性に応じて報酬が支払われる資本ストックを売るので，請求権は実物請求権よりも年下世代にとって制約が少ない。

2) 有限計画視野モデルにおいては，名目請求権は超過需要関数の同次性を損ない，均衡が存在しなくなる可能性を生じさせる。

年長世代の請求権が，税を財源とする年金制度により支払われる場合には，(iii)を想定するのが自然である。(i)と(ii)においては，第 1 世代は課税されず，年長世代の請求権は年下世代の貯蓄から支払われる。また各期 $t=1,2,\ldots$ の価格は，年下世代が必要な金額を貯蓄するように調整される。絶対価格水準を引き上げれば，請求権を減らす（あるいは 0 にする）こともできるので，年下世代にとって(ii)は(i)よりも制約が小さい。

このような請求権は第 1 期の公的支出から発生し，その財源は例えば第 1 世代の貯蓄から調達されると解釈することもできる。この場合には，第 t 期の若年世代（第 1 期ならば第 1 世代）が老年期になった時の消費を補償することを無限に続けることによって，第 1 期における年長世代（第 0 世代）の消費を増やすことも可能である。このようにすれば，誰の厚生も損なうことなく，第 0 世代の厚生が改善される。もし均衡が，このような増加前に Pareto 効率的であれば，このように消費を増加させることは明らかに不可能である。これが，重層世代モデルにおいて Pareto 効率性を研究することが重要である理由である。

本稿では，(i)に焦点を当て，(ii)と(iii)は簡単に検討する。

3.　モデル仕様と均衡存在

3.1　実物請求権のある均衡

ここでは，金融資産が実物請求権である(i)の純粋交換重層世代モデルを特定して，以下の仮定の下でその均衡を定義する。

仮定 CO1

各消費者の生涯効用関数，$u^t : R^r_+ \times R^r_+ \to R_+, u(x^t_t, x^t_{t+1})$ は，全ての t について厳密に凹，上から一様に有界，非減少的である。正の消費について連続微分可能である。両期において，消費は必要である。すなわち

$$\lim_{x\to 0}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\| = \infty \qquad \text{全ての } y \geq 0 \text{ について}$$

$$\lim_{y\to 0}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\| = \infty \qquad \text{全ての } x \geq 0 \text{ について}$$

最後に，効用関数は，第 t 期と第 $t+1$ 期の両方において，少なくとも 1 つの商品 k に関して増加的であり，そのような商品の集合を K とする。

$u(.)$ の上からの一様有界性は，消費者の需要に影響することなく，これを保証するような効用の単調変換を常に見付けることができるので，制限とはならない。極限条件は境界条件として機能し，効用最大化の下で消費は消費者の生涯の両期において正であることを保証する。

仮定 CO2（非 0 の賦存量）

賦存量は非負であり，定常的である（したがって有界である)。すなわち，$\omega_t^{t-1} = \omega_1^0$, $\omega_t^t = \omega_1^1$ であり，かつ $\omega_1^0 + \omega_1^1 > 0$ である。各消費者は，自分の効用が増すような，少なくとも 1 つの商品 k の正の賦存量を，第 t 期あるいは第 $t+1$ 期に持つ。

賦存量と効用関数の不変性は，便宜上，仮定される。ある期 T より先の不変性は，定常状態の存在のために仮定される。請求権が支払われるために，次が必要である。

仮定 CO3

$\omega_{k,1}^0 + m_k^0 \geq 0$ であり，ある商品 $k \in K$ については厳密に正である。全ての k について，$\omega_{k,1}^1 - m_k^1 \geq 0$ である。

無差別曲線の傾きについて，次を仮定する。

仮定 CO4（無差別曲線の傾き）

全ての商品 h と k，全ての非 0 消費について，$\dfrac{\left(\frac{\partial u(.)}{\partial x^{t}_{h,t+1}}\right)}{\left(\frac{\partial u(.)}{\partial x^{t}_{k,t}}\right)} \leq \delta$ となるようような正の定数 δ が存在する。

第 0 世代の消費者は，x^0_0, m^0, ω^0_1 を与件として以下の問題を解く。

(2a)
$$\max_{x^0_1 \geq 0} u\left(x^0_0, x^0_1\right)$$
$$\text{subject to} \quad p_1 x^0_1 \leq p_1 m^0 + p_1 \omega^0_1$$

一方，第 t 世代，$t = 1, 2, \ldots$ の消費者は，次の 2 期間問題を解く。

(2b)
$$\max_{x^t_t, x^t_{t+1} \geq 0} u\left(x^t_t, x^t_{t+1}\right)$$
$$\text{subject to} \quad p_t x^t_t + p_{t+1} x^t_{t+1} \leq p_t \omega^t_t + p_{t+1} \omega^t_{t+1}$$

ただし，上付き添字は世代を，下付き添字は期間を表している。そして，市場は毎期，清算される。

(2c)
$$x^{t-1}_t + x^t_t \leq \omega^{t-1}_t + \omega^t_t \qquad p_t \geq 0 \qquad t = 1, 2, \ldots$$

ここで，消費者達の集計的な貯蓄は，均衡においては時間を超えて一定になり，初期請求権に等しくなることを確認できる。すなわち，予算制約式は，第 0 世代については

(3)
$$p_1 x^0_1 = p_1 \omega^0_1 + p_1 m^0$$

であり，第 1 世代については，2 つに分けて

(4)
$$p_1 x^1_1 + S^1 = p_1 \omega^1_1$$
$$p_2 x^1_2 = p_2 \omega^1_2 + S^1$$

と表すことができる。また，各期の市場清算条件は

(5)
$$p_1\left(x^0_1 + x^1_1\right) = p_1\left(\omega^0_1 + \omega^1_1\right)$$

を意味する。(3)と(4)の和から(5)を引くと，$S^1 = p_1 m^0$ を得る。この関係を繰り返し適用することによって

$$S^t = p_1 m^0$$

を得る。これは，王朝モデル[3)]と同様に，貯蓄は一定であり，初期請求権に等しいことを意味する。したがって，もし m^0 が正であれば，若い世代それぞれは，自分の賦存量の価値 $p_t \omega_t^t$ よりも少なく支出するであろう[4)]。

定義（実物請求権のある重層世代純粋交換均衡）

任意の有限の t について有界である価格ベクトル，$p_t^* \geq 0, t = 1, 2, \ldots$ により支持される配分 x_t^{t*}, x_{t+1}^{t*} は，もしそれが(2a)と(2b)を解き，全ての期について市場清算条件(2c)を満たすならば，重層世代純粋交換均衡である。

このように定義される均衡の存在を証明するために，第 T 期に生まれ，第 0 世代に移転 $p_1 m^0$ を支払う最後の消費者がいる T 期間重層世代モデル（縮約モデル）を利用する。これが，Walras 法則を維持するための工夫である。第 T 世代の老年期消 x_{T+1}^T は，第 0 世代の若年期消費 x_0^0 と同じく外生的であり，どの期 $t = 1, 2, \ldots, T$ の市場清算条件にも現れない。

この縮約モデルにおいて，消費者 T は，自分の老年期の消費 x_{T+1}^T と，第 0 世代の請求権 m^0 を与件として次の問題を解く。

(6) $$\max u^T \left(x_T^T, x_{T+1}^T\right)$$

$$\text{subject to} \qquad p_T x_T^T = -p_1 m^0 + p_T \omega_T^T$$

請求権は消費者 T の所得を上回る可能性があるので，x_T^T を非負に限定することはできない。よって，効用関数の定義域をしかるべく定義し直す必要がある。すなわち，$u^T(.)$ は，非負象限では $u(.)$ と同じ性質を持つ

3) 前稿（小平 (1999)）の王朝モデルでは，初期請求権は 0 であると仮定されたが，非 0 であっても，そこで与えられた推論は当てはまる。

4) 各世代に複数の消費者がいる時には，貯蓄は一定であるという性質は，世代全体についての集計量について妥当する。同じ世代に属する消費者の間で，互いに貸し借りすることも可能であるが，集計量には影響しない。

効用関数であるが，非負象限外の値にも定義されている。しかし，このような $u^T(.)$ の修正は，存在証明に実質的に影響しない。消費者 T は，$p_1 m^0$ に等しい貯蓄を強制される。

縮約モデルは，最後の世代に強制された移転を伴う Arrow-Debreu モデルに他ならない。均衡の存在証明は，次の命題 1 の証明(I)において与えられる。(II)では，T を無限大まで延長する時の解の点列を考察する。この場合には，消費者 0 から $T-1$ までの消費点列の長さもまた無限大になり，消費者 T はあたかも計画視野の中に消えてしまうようになり，第 $T-1$ 世代までの消費点列が無限計画視野の均衡に収束することが示される。

命題 1（実物請求権のある純粋交換重層世代モデルにおける均衡の存在）

仮定 CO1，CO2，CO3，CO4 の下では，各消費者が自分の人生の各期において非 0 の消費を行う重層世代均衡が存在する。

（証明）

(I) 縮約モデルの均衡

ここで，厚生加重 α^t（上付き添え字は，世代を表す）を持つ根岸表現[5] の形で，(2)の T 期間モデルを定義する[6]。ただし，第 T 世代はその予算制約を通じて，モデルに組み込まれる。

(7)
$$\underset{x_t^{t-1},x_t^t\geq 0,t=1,2,\ldots,T-1,x_T^{T-1}\geq 0}{\text{maximize}} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t u\left(x_t^t, x_{t+1}^t\right)$$
$$\text{subject to}\quad x_t^{t-1}+x_t^t \leq \omega_t^{t-1}+\omega_t^t \qquad t=1,2,\ldots,T \qquad (p_t)$$
$$\overline{p}_t x_t^t+\overline{p}_{t+1}x_{t+1}^t \leq \overline{p}_t \omega_t^t+\overline{p}_{t+1}\omega_{t+1}+\varepsilon$$
$$t=1,2,\ldots,T-1 \qquad (\rho^t)$$

5) 小平 (1998) 参照。
6) ここで私たちは，消費者 0, 1, ..., $T-1$ への配分にのみ関心がある。消費者 T は残余として機能するだけである。

$$\overline{p}_1 x_1^0 \leq \overline{p}_1 m^0 + \overline{p}_1 \omega_1^0 + \varepsilon \qquad (\rho^0)$$

$$\overline{\overline{p}}_T x_T^T = -\overline{p}_1 m^0 + \overline{\overline{p}}_T \omega_T^T \qquad (\rho^T)$$

ここに，m^0, x_0^0, x_{T+1}^T は与件であり，ベクトル $\alpha = (\alpha^0, \alpha^1, ..., \alpha^{T-1})$ と $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_{T-1})$ は，それぞれ単体 S^T と $S^r(T-1)$ に属す。ε は正の定数であり，$\overline{\overline{p}}_T$ は所与の正ベクトルである。

各 $(\alpha, \overline{p})$ に対して，(7)は実行可能であり，($\overline{\overline{p}}_T$ は正であり，x_T^T，したがって x_T^{T-1} は有界でなければならないので）コンパクト値であり，Slater の制約条件を満たす（ここで，T を除く全ての消費者について，$\varepsilon > 0$ を利用する。消費者 T については，若年期消費を負にすることができるので，$\varepsilon > 0$ は必要とされない)。よって，この計画には常に解と Lagrange 乗数 p_t, ρ^t が存在する。さらに，x_T^T に関する 1 階の条件は，$\overline{p}_T = \overline{\overline{p}}_T$ を保証する。

仮定 CO1，CO2 の下で，根岸定理（小平 (1998，命題 4)）の証明の 2 つの段階を行うことができる。

段階 1：不動点対応の構築

Lagrange 乗数を与える対応と，厚生加重と価格を改定する関数を求めて，不動点対応を構築する。Lagrange 乗数を与える対応は，(7)から求められる。厚生加重は

(8) $$\alpha^t = \mu(\hat{\alpha}^t + \delta s^t) \qquad t = 0, 1, ..., T-1$$

により改訂される。ただし，δ は正の定数であり，μ は $\sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t = 1$ となるようなスカラーである。s^t は消費者 t の超過予算であり，$\hat{\alpha}^t$ は α^t の改訂前の値である。

価格は

(9) $$\overline{p}_t = \lambda(p_t + \rho \hat{p}_t) \qquad t = 0, 1, ..., T-1$$

$$\overline{\overline{p}}_T = \lambda\pi \qquad \text{固定された } \pi \in R_{++}^r$$

により改訂される。ただし，$\rho = \max_t \rho^t$, λ は $\overline{p}$ が単体 $S^{r(T-1)}$ に属するような値であり，$\hat{p}_t$ は $\overline{p}_t$ の改訂前の値である。根岸定理の証明の段階 1 より，このように定義された対応には，不動点が存在する。

段階 2：不動点は均衡である

利用している仮定が多少，異なるので，ここでは根岸定理の証明をそのまま利用することはできない。不動点においては

(10) $\alpha^t = \mu(\alpha^t + \delta s^t) \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1$

となる[7]。

ここで，α^t は全ての t について正であることを示そう。厚生加重の正規化より，α^t はある t，例えば t' について正でなければならないことが分かる。次に，商品 $k \in K$ に関する $u(.)$ の増加性（仮定 CO1）により，$k \in K, t = t', t' \neq 0, t' \neq T$ について，$\overline{p}_{kt} > 0$ かつ $\overline{p}_{k,t+1} > 0$ を得る。これは，消費者 $t'-1, t', t'+1$ に正の所得を与える。消費者 0 は，価格 $\overline{p}_{k,1}$ のみを必要とする。ここで，消費者 $t'-1$ の厚生加重は 0 であると仮定しよう。これは，消費者 $t'-1$ に支出 0，正の所得を与え，したがって予算黒字を与える。この時，(10)により，彼の厚生加重は正になり，0 とした上の仮定と矛盾する。同じ論理により，$t'+1$ の厚生加重は正となり，よって全ての厚生加重は正となる。$\overline{p}_t \neq 0$ であることが分かり，根岸定理と同じ理由により，全ての予算余剰は 0 である。

ε の導入により，(7)の予算制約は全て有効ではなくなり，ρ^t は任意の均衡において全ての t について 0 になる。最適配分に影響を与えることなく，この ε を 0 まで小さくすることができるので

$$\rho = \max_t \rho^t = 0$$

とすると，この時(9)は

$$\overline{p}_t = \lambda p_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

となり，$\overline{p}_t$ は p_t に比例することが分かる。均衡においては，$p_T = \pi$ であるから，第 T 期について $\overline{p}_T = \lambda p_T$ と定めることもできる。不動点においては，$\rho^t = 0$ であるので，根岸定理が成立し，(7)の解は縮約モデルの競争均衡になる。

7） 記号法の便宜のために，均衡値を表すための上付き添え字*を省略する。

(II) T を無限大に延長する

(a) 縮約モデルを定式化し直す

(I)において，価格は計画視野 T の上で正規化されていた。しかし，T を無限大に延長する時には，この正規化は利用できない。そこで，この縮約モデルについて消費者固有価格を，次のように定義する。

(11)
$$\overline{p}^t_t = \lambda^t \overline{p}_t$$
$$\overline{p}^t_{t+1} = \lambda^t \overline{p}_{t+1}$$

ただし，λ^t は，$t = 1, 2, ..., T-1$ について，$\sum_k \left(\overline{p}^t_{kt} + \overline{p}^t_{k,t+1}\right) = 1$ となるような正のスカラーである。

(12)
$$\overline{p}^0_1 = \lambda^0 \overline{p}_t$$

ただし，$t=0$ について，$\sum_k \overline{p}^0_{k1} = 1$ である。

（すでに見たように，$\overline{p}_t$ は各 t について非 0 であるので）この正規化は実行可能であり，（消費者 t の予算制約の価格を，(7)のそれの定数倍にするだけであるので）配分を変えない。

(I)より，α^t, x^T_T，そして新たに正規化された価格 $\overline{p}^t_t, \overline{p}^t_{t+1}$ の均衡値が得られる。消費者 0 から $T-1$ の配分は，ここでもまた，消費 x^T_T を第 T 期市場清算条件における与件として扱う（したがって，消費者 T の予算制約を落とすことができる）以下の問題から求めることができる。

(13)
$$\max_{x^{t-1}_t, x^t_t \geq 0, t=1,2,...,T-1, x^{T-1}_T \geq 0} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t u\left(x^t_t, x^t_{t+1}\right)$$

$$\text{subject to} \quad x^{t-1}_t + x^t_t \leq \omega^{t-1}_t + \omega^t_t \qquad t = 1, 2, ..., T \qquad (p_t)$$

$$\overline{p}^t_t x^t_t + \overline{p}^t_{t+1} x^t_{t+1} \leq \overline{p}^t_t \omega^t_t + \overline{p}^t_{t+1} \omega^t_{t+1}$$
$$t = 1, 2, ..., T-1 \qquad (\rho^t)$$

$$\overline{p}^0_1 x^0_1 \leq \overline{p}^0_1 m^0 + \overline{p}^0_1 \omega^0_1 \qquad (\rho^0)$$

もし(I)の段階 1 において，ある有限の T 期間縮約モデルの均衡値として得られた x^T_T が，たまたま無限計画視野重層世代モデルの均衡値でもあるならば，(13)の解は，消費者 $t = 0, 1, ..., T-1$ について，無限計画視

野重層世代モデルの解でもあることになる。

(I)において，それに対して縮約均衡が存在す x_T^T の値を少なくとも 1 つは見付けることができることを示したが，そのような x_T^T は多数存在し，それぞれの x_T^T に対して，少なくとも 1 つの価格経路 $\overline{p}_t^t$，$t = 1, 2, \ldots, T-1$ が存在する可能性がある。以下では，T が大きくなる時に，そのような価格経路の集合は縮小して，最終的には望まれる x_T^T の値を与えることを示す。

(b) 消費者固有価格への収束

ここで Balasko, Cass, and Shell (1980) に従い，2 期間価格ベクトル $q^t = (q_0^t, q_1^t)$ を次のように定義する。

$t = 0$ については　　$q^0 = (0, \overline{p}_1^0)$

$t = 1, 2, \ldots, T-1$ については　$q^t = (\overline{p}_t^t, \overline{p}_{t+1}^t)$

$t = T, T+1$ については　　$q^t \in S^{2r}$

すなわち，$t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$ については，これらの $\overline{p}_t$ は T 期間縮約均衡値であるが，$t = T+1, \ldots$ の価格は単体の上で任意に設定される。価格経路 $\{q^t\}_{t=0}^{\infty}$ は，このように構築される。

それに対して均衡が存在するような任意の x_T^T について，このような点列を定義することができる。また，x_T^T の他の値に対応する価格経路が存在する可能性がある。$Q(T)$ を，計画視野 T に対して得られるこのような可能な価格経路全ての集合とする。縮約均衡が存在するので，集合 $Q(T)$ は非空であり，無限次元集合 $B = S^{2r} \times S^{2r} \times \ldots$ に属する。

ここで，計画視野が T から $T+1$ へ延長される時に，可能な x_T^T の値の集合が大きくなることはないので，可能な価格経路の集合も大きくなることはないこと，すなわち $Q(T) \supseteq Q(T+1)$ という関係を利用することができる。

B はコンパクト集合（単体 S^{2r}）の無限次元積であるから，B も積位相においてコンパクトである。よって，$Q(T)$ は，コンパクト非空集合の非

増加点列 $\{Q(T)\}_{T=1}^{\infty}$ を定義する。したがって，$Q(\infty)$ すなわち非空コンパクト集合の非増加点列の共通部分は非空である。ゆえに，無限大に延長された T に対して，点列 $\{q^t\}_{t=0}^{\infty}$ が存在する。

(c) 価格の導出

次に，消費者固有価格 q^t から，有界均衡価格 p_t を取り出すために，先ず比率 $g^t = \dfrac{\sum_s \overline{p}_{s,t+1}^t}{\sum_s \overline{p}_{s,t}^t}$ を定義する。全ての価格を，消費者 0 の正規化 $\sum_s \overline{p}_{s,1}^0 = 1$ を使って表し，(11)と(12)を使い

$$p_t \left(\prod_{\tau=1}^{t} g^{\tau}\right)\overline{p}_t^t$$

として，消費者固有価格から市場価格 p_t を導出する。もし比率 g^{τ} が $\tau = 1, 2, \ldots, t$ について有界であれば，p_t の点列は有限の t について有界である。

これは，次のように証明される。所得は正であるから，消費者は若年期，老年期の両期共に何らかの商品を消費する。効用最大化の 1 階の条件から，商品のある対 h，k について，比率

$$\left[\frac{\partial u(.)}{\partial x_{h,t+1}^t}\right] \Bigg/ \left[\frac{\partial u(.)}{\partial x_{k,t}^t}\right] = \frac{\overline{p}_{h,t+1}^t}{\overline{p}_{k,t}^t}$$

を得るが，これは仮定 CO4 により上から有界である。よって

$$\frac{\sum_s \overline{p}_{s,t+1}^t}{\sum_s \overline{p}_{s,t}^t} \leq \frac{\sum_s \partial u(x_t^t,\ x_{t+1}^t)/\,\partial x_{s,t+1}^t}{\partial u(x_t^t,\ x_{t+1}^t)/\,\partial x_{k,t+1}^t} \leq r\delta$$

ただし，k は $x_{kt}^t > 0$ となるように選ばれる。したがって，比率 g^t も有界であり，任意の有限な t について p_t は有界である[8)]。

(d) 需要点列の収束

最後に，(与えられた正規化された価格 q^t において，効用最大化問題を解くこ

8) しかし，p_t は有限な値の無限の積であるから，t が無限大に近付く時に，p_t が有界ではなくなる可能性は残る。

とによって得られた）消費者 t の均衡需要も収束することを示すことができる。実際に，そのような q^t に対して，需要は q^t に関して連続であり，次元は $2r$ で有限であり，市場を清算する。T が無限大になる時にも，需要は連続である。したがって，$Q(T)$ が $Q(\infty)$ に収束する時には，需要も収束する。（証了）

有限計画視野の縮約モデルにおいては，消費者 T から消費者 0 への移転が必要であることを思い出そう。すなわち，消費者 T の所得は負になるかも知れず，老年期消費は外生的に与えられ，選択できない。したがって，第 T 期の市場を清算する価格は存在するが，競争的に決まる訳ではない。第 T 世代以外の全ての消費者は競争価格をシグナルとして，生涯にわたる消費計画すなわち貯蓄を決定する。例えば，消費者 1 は，消費者 2 が自分の請求権に支払ってくれることを理解しているので，消費者 0 の請求権 $p_1 m^0$ に支払うのに十分な貯蓄を自発的に行う。問題が生じるのは，有限計画視野の最終の第 T 期である。もし T を無限大に近付けることができれば，無限の将来において問題が生じる可能性を除き，その体系は競争条件の下で「永遠に」機能する。

最後に，価格 p_t は有限の t については全て有界であるが，無限大においては有界にならない可能性があり（注 8 参照），その場合には厚生加重も有界にはならない。また，各厚生加重が有界であっても，その総和は有界ではないかも知れない。この場合には，社会的厚生は無限大になり，以下で見るように，均衡は Pareto 効率でなくなる可能性がある。しかし，もしある割引要素 $\gamma \in (0,1)$ に対して，$\alpha^t \leq \gamma^{t-1}$ であれば，厚生もまたそうなり，$\lim_{t\to\infty} p_t = 0$ となる。これは，王朝モデルの場合と同様に効率性を保証する。

3.2　名目請求権がある均衡

上で見たように，請求権が実物請求権である場合には，$M^0 = p_1 m^0$ が成立して，消費者 t の均衡における生涯予算制約を，若年期と老年期に分けて

(14a) $$p_t x_t^t = p_t \omega_t^t - p_1 m^0$$

(14b) $$p_{t+1} x_{t+1}^t = p_{t+1} \omega_{t+1}^t + p_1 m^0$$

と書くことができた。請求権が名目請求権である(ii)の場合には，これらの予算制約は

(15a) $$p_t x_t^t = p_t \omega_t^t - M^0$$

(15b) $$p_{t+1} x_{t+1}^t = p_{t+1} \omega_{t+1}^t + M^0$$

と表される。これは，消費者 0 の老年期と消費者 T の若年期について，M^0 を与件とする次の関係を与える。

$$p_1 x_1^0 \leq p_1 \omega_1^0 + M^0$$
$$p_T x_T^T \leq p_T \omega_T^T - M^0$$

このモデルの均衡の存在証明には，M^0 の価格 μ_1 を導入して，単体に属する価格ベクトルを与えるのが便利である。M^0 を利用して正規化した価格 p_t は，$\dfrac{\tilde{p}_t}{\mu_1}$ に等しいから，上の予算制約は次のように書き換えられる。

(16) $$\tilde{p}_1 x_1^0 \leq \tilde{p}_1 \omega_1^0 + \mu_1 M^0$$

(17) $$\tilde{p}_T x_T^T \leq \tilde{p}_T \omega_T^T - \mu_1 M^0$$

$\mu_1 = 0$ と設定すれば，第 0 世代の請求権は消滅して，実物請求権のないモデルに戻ることになる。これは，請求権を無視するか，あるいは価格 p_t を無限大に等しく設定することを意味し，可能な均衡の 1 つである。

その他の均衡の可能性を調べよう。値 μ_1 は，次のように選択される「消費者 T の自発的貯蓄」の価格として解釈することが可能である。

(18) $$\max_{x_T^T,\, x_{T+1}^T \geq 0} u^T\left(x_T^T,\, x_{T+1}^T\right)$$

$$\text{subject to} \quad \tilde{p}_T x_T^T \leq -\mu_1 \tilde{p}_{T+1}\left(x_{T+1}^T - \omega_{T+1}^T\right) + \tilde{p}_T \omega_T^T$$

ただし，$\tilde{p}_{T+1} > 0$ は外生的に与えられており，この計画の予算制約は(17)

を置き換える。消費者 T は，価格 $\mu_1\tilde{p}_{T+1}$ で自分の消費 x^T_{T+1} を選ぶことができ，仮定 CO1 を満たす通常の効用関数を持つ。この自発的貯蓄の市場清算条件は

(19) $$\tilde{p}_{T+1}\left(x^T_{T+1}-\omega^{\mathrm{T}}_{T+1}\right)\leq M^0 \qquad \mu_1\geq 0$$

である。

根岸表現(7)において，消費者 0 と消費者 T には予算制約(16)と(18)を与え，市場清算条件として(19)を与えれば，価格 $\tilde{p}_t$ と追加的な価格 μ_1 を使って，証明を命題 1 と同様に進めることができる。ゆえに，均衡は存在する。もし均衡において，値 μ_1 が正であれば，正規化として利用することもでき，価格 p_t で表される本来のモデルの解を得る。この場合には，貨幣は，有限計画視野モデルでは持たない稀少性を持つ[9]。

T 期間均衡解は，消費者 T に課せられる制約に依存する。この他の制約も可能であり，重層世代モデルが別の均衡を持つ可能性が残る。

3.3　租税がある均衡

計画視野の最後の消費者に制約を課すことは，第 T 期以前の「政府介入」を意味しない。反対に，早い期間の介入を考えることもできる。つまり，これは，消費者 t が税 $p_t m^0$ を支払い，年金 $p_{t+1}m^0$ を受け取るモデルになる。この場合の生涯予算制約は

$$p_t x^t_t+p_{t+1}x^t_{t+1}=p_1\omega^t_t+p_{t+1}\omega^t_{t+1}-p_1 m^0+p_{t+1}m^0$$

である。ここで，所得があらゆる価格において正であることを保証しなければならない。十分条件は，m^0 を $\omega^t_t(=\omega^1_1)$ の一部とすることである。生涯予算制約は

(20a) $$p_t x^t_t+S^t=p_1\omega^t_t-p_1 m^0$$

(20b) $$p_{t+1}x^t_{t+1}=p_{t+1}\omega^t_{t+1}+S^t+p_{t+1}m^0$$

と分けられ，均衡において $S^t=0$と設定することが，各消費者にとって

9)　例えば，Hahn (1984) を見よ。

最適であることが分かる。しかし，消費者 T にはこの選択はない。彼は，$S^T=0$ と設定され，税 $p_T m^0$ を支払うことを強制されている。彼の問題は，次のようになる。x_{T+1}^T が与えられた時

(21)
$$\max_{x_T^T \geq 0} u^T(x_T^T,\ x_{T+1}^T)$$
$$\text{subject to} \qquad p_T x_T^T = p_T \omega_T^T - p_T m^0$$

存在は，命題 1 と同じ方法で証明される。

4.　均衡の非効率性

すでに示したように，非効率である重層世代均衡においては，若年世代は老年期には補償されるので，他の世代の効用を引き下げることなく，ある世代（すなわち，第 0 世代）の老年期消費（第 1 期消費）を増加させることが実行可能である。計画視野を有限にした縮約モデルにおける実物請求権がある重層世代均衡では，消費者 T は若年期には貯蓄することを，老年期には外生的に与えられた x_{T+1}^T を消費することを強制されるので，明らかに非効率である。存在証明の(II)では，重層世代均衡は，値 x_T^T が第 1 期から第 T 期迄について均衡が存在するような値の集合に制限されている均衡の点列の極限として得られる。計画視野が延長される時，可能な x_T^T の値の集合は小さくなるが，非効率配分をもたらす値はなお存在する。非効率的均衡の例については，多くの研究がある。ここで，効率性の十分条件を 2 つ取り上げよう。先ず，賦存量の値が長期には 0 になる場合を考察する。

命題 2（値が 0 に収束する場合の重層世代均衡の効率性）[10)]

もし定義の重層世代均衡において，$\lim_{t\to\infty} p_t\,(\omega_t^{t-1}+\omega_t^t)=0$ であれば，均衡は Pareto 効率である。

10)　証明については，Geanakoplos and Polemarchakis (1991) を見よ。

（証明）

証明は，背理法による。その均衡は非効率であるとしよう。この時，例えば消費者 1 の厚生を改善する別の配分が存在する。そのような配分を表すために，実行可能性制約と，その他の消費者達の厚生は悪化しないという制約の下で，消費者 1 の効用が最大化され，均衡とそれに従う T 期間計画に関係する価格 p_t^* の点列を考えよう。すなわち，与えられた x_0^0 に対して

$$(22) \qquad U(\alpha^{1*}, u^*, x_T^{T*}) = \max_{x_t^{t-1}, x_t^t \geq 0, t=1,2,\dots,T} \alpha^{1*} u(x_1^1, x_2^1)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & x_t^{t-1} + x_t^t \leq \omega_t^{t-1} + \omega_t^t && t = 1,2,\dots,T \\ & u(x_t^t, x_{t+1}^t) \geq u^{t*} && t = 0,1,\dots,T-1 \\ & x_T^T = x_T^{T*} && (p_T^*) \end{aligned}$$

ただし，x_T^{T*} と u^{t*} は均衡値であり，α^{1*} は均衡価格 (p_1^*, p_2^*) における消費者 1 の所得の限界効用の逆数である。p_T^* は T における均衡価格である。

(22)から求められる配分は，明らかに，与えられた x_T^{T*}（と，与えられた u^{t*}）に対して効率的であり，1 つの重層世代均衡である。すなわち，x_T^{T*} のある実行可能な変分 Δ が，例えば消費者 $0, 2, 3, \dots, T-1$ の，あるいは T 以降の任意の消費者の厚生を損なうことなく，消費者 1 により高い効用を与える場合に限り，その重層世代均衡は非効率になる。これは

$$(23) \qquad U(\alpha^{1*}, u^*, x_T^{T*} + \Delta) > U(\alpha^{1*}, u^*, x_T^{T*})$$

を，すなわち $U(.)$ は x_T^{T*} に関して凹であることを意味する。p_T^* は，$U(.)$ の x_T^{T*} に関する劣微分であるから

$$(24) \qquad U(\alpha^{1*}, u^*, x_T^{T*} + \Delta) \leq U(\alpha^{1*}, u^*, x_T^{T*}) + p_T^* \Delta$$

変分 Δ は実行可能であるので

$$p_T^*(x_T^T + \Delta) \leq p_T^*(\omega_T^{T-1} + \omega_T^T)$$

よって

$$p_T^*\Delta \leq p_T^*(\omega_T^{T-1} + \omega_T^T)$$

ここで，仮定により

$$\lim_{t\to\infty} p_1(\omega_t^{t-1} + \omega_t^t) = 0$$

したがって，T が大きくなる時に，上の不等式の右辺は 0 に収束する。よって，$p_T^*\Delta$ は正にはなり得ないので，(23)と(24)は矛盾する。（証了）

実物請求権，名目請求権，税という 3 種類の請求権について，この命題の意味を考えよう。$S^t = 0$ とした方程式(14a)，(15a)，(20a)から，均衡においては，消費者 t の若年期の予算制約は

$$p_t x_t^t + M^t = p_t \omega_t^t$$

となる。ただし，M^t は，実物請求権 $p_1 m^0$，与えられた名目請求権 M^0，税 $p_1 m^0$ の何れかである。もし $\lim_{t\to\infty} p_1(\omega_t^{t-1} + \omega_t^t) = 0$ であれば，$p_t \omega_t^t$ も，したがって全ての M^t も 0 になる。

実物請求権の場合には，この極限条件は $p_1 m^0$ が 0 に限りなく近付くことを意味する。$\sum_k p_{1k}$ を 1 に正規化することができる（命題 1 の証明の(II)を見よ）ので，$p_1 \neq 0$ である。この時，$p_1 m^0$ が 0 になるためには，m^0 の正の成分の価格は 0 でなければならない。したがって，もし仮定 CO1 に定義されるある商品 $k \in K$（すなわち，価格が正になる商品）について，m^0 が正の成分を持つならば，均衡においては $p_1 m^0 = 0$ は成立せず，極限条件は成立しない。

名目請求権の場合には，極限条件は(15a)では満たされない。しかし，請求権を価値尺度財として利用しない(16)の価格で表すと，もしインフレによって請求権が消滅することを意味する $\mu_1 = 0$ ならば，その条件は満たされる。最後に，税の場合には，請求権は現在価格 p_t で支払われることになっているので，極限条件が満たされることはない。

この他にも，支出関数の曲率は 0 にはならないと仮定すること（有限の異時点間維持可能性）や，無限の数の期について価格は無限にはなり得ない

と仮定すること（$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=t_0}^{T}\frac{1}{c_t\,\|p_t\|}=\infty$，ただし c_t は $\varepsilon>0$ より大きな定数である）も効率性の十分条件になる。もし価格が 0 に近付くか，あるいは一定になるならば，後者の条件は満たされる。反対に，非効率性のための十分条件は，効用が期間の間で有界な曲率を持つことと，価格が無限大に近付くこと（$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=t_0}^{T}\frac{1}{\|p_t\|}=\infty$）である[11]。

5. 均衡の不確定性

重層世代均衡が不確定になるかも知れない理由は，2 つ挙げられる。第 1 は，このモデルには，無限の数の価格があり，無限の数の消費者がいることである[12]。第 2 は，存在証明において x_T^T は任意に固定されていること，可能な均衡の集合は小さくなるけれども，1 つの経路には帰着しないかも知れないことである。

たとえ命題 2 の効率性の条件が満たされるとしても，均衡が確定しない可能性がある。しかし，割引のために後の期の配分は初期の配分に影響しないので，異なる x_T^T に対応している均衡は，T が十分大きければ，殆ど違わないであろう。

しかし，消費者が 2 期間生きる 1 商品経済においては，不確定性は生じないことは，次のように説明される。$p_1=1$ と設定して，消費者 1 が自発的に $p_1 m^0$ を貯蓄するように p_2 を調整する。この手続きを，消費者 2, 3, ... に繰り返せば，重層世代モデルの均衡となる価格と配分の一意的な無限点列が得られる。

11）Geanakoplos and Polemarchakis (1991) を見よ。証明は，若年世代に課税すること，そして彼らが老年になった時に補償が実行可能であることを確認しながら進められる。曲率が 0 になる時は，異時点間代替可能性が高く，したがって補償は容易になり，非効率になり易い。逆に，曲率が無限大になる時は，異時点間代替可能性はなく，補償の余地はない。非効率性に関する結果は，与えられた賦存量を持つ交換経済について証明される。

12）Kehoe, Levine, Mas-Colell, and Zame (1989) と Mas-Collel and Zame (1991) も見よ。

参照文献

Balasko, Y., D. Cass, and K. Shell (1980), "Existence of a competitive equilibrium in a general overlapping generations model," *Journal of Economic Theory* 23: 307-22.

Geanakoplos, J. D., and H. M. Polemarchakis (1991), "Overlapping generations," in W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 4, North-Holland.

Hahn, F., (1984), *Equilibrium and Macroeconomics,* Basil Blackwell.

Kehoe, T. J., D. K. Levine, A. Mas-Colell, and W. R. Zame (1989), "Determinacy of equilibrium in large-scale economies," *Journal of Mathematical Economics* 18: 231–62.

Mas-Colell, A., and W. R. Zame (1991), "Equilibrium theory in infinite dimensional spaces," in W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 4, North-Holland.

小平裕 (1998)「一般均衡モデルの根岸表現と存在証明」, 成城大学『経済研究』第 143 号, 171-188 ページ。

小平裕 (1999)「王朝モデル：無限計画視野の一般均衡」, 成城大学『経済研究』第 145 号, 55-67 ページ。