生産を伴う重層世代モデル：無限計画視野の一般均衡

小　平　　裕

1.　はじめに

本稿の目的は，生産を伴う重層世代モデル overlapping generations model を構築して（第 2 節），均衡の存在（第 3 節），非効率性と不確定性（第 4 節）を検討することである。

一般均衡理論の枠内で計画視野 time horizon が無限大である場合を考察する際に，多少の工夫が必要となるのは，消費者についてである。すなわち，一般均衡モデルにおいては，需要側に消費者，供給側に生産者という 2 種類の経済主体が想定されるが，生産者については，これを企業と考えれば，無限の寿命を想定することもそれほど不自然ではない。しかし，消費者について，計画視野の長さが有限から無限に延長される場合に，単純に消費者の寿命も無限に長くなると考えるのは不自然であるからである。

したがって，無限計画視野を表すモデルは，消費者の寿命に関する想定によって，2 つに区分される。1 つは，消費者すなわち家計と考えて，経済の需要側は無限に続く家計によって表されるとし，そのような家計が有限の数だけ存在すると想定する王朝モデル dynasty model であり，小平 (1999a) で検討した。もう 1 つは，それぞれの寿命は有限である消費者が各世代に有限の数だけ居り，そのような世代の重なり合いが無限に続くと想定する重層世代モデルである。重層世代モデルについては，生産の行われない純粋交換経済の検討を小平 (1999b) で行った。本稿では，このモデルを拡張して，生産を伴う経済を考察する。

これらのモデルの違いは，貯蓄のあり方に明確に現れる。消費者（＝家

計）が，無限の長さの生涯にわたる富制約の下で，生涯効用を最大にするように行動する王朝モデルでは，1 つの家計の各世代は，互いの効用を予測しながら，将来世代に遺産を残す（あるいは将来世代から借り入れる）。これとは対照的に，重層世代モデルでは，貯蓄のより自然な取扱いが可能になる。純粋交換経済の重層世代モデルでは，自分の老後の生活費のために，各世代が老年期に払い戻される金融請求権を若年期に購入する貯蓄行動が分析される。一方，本稿で取り上げるように，生産が行われる経済には繰り返し繰り返し生産に利用することができる資本財が導入され，資本蓄積も行われる。したがって，各世代は若年期に物的資本財を購入し，老年期にその資本財を年下の世代に売却することができる。すなわち，生産経済においては，消費者は純粋交換経済における金融請求権を利用する形の貯蓄に加えて，資本財を利用する形の実物貯蓄も利用可能である。

2.　モデルの仕様

モデルは第 1 期から始まり，消費者は 2 期間生きるものとしよう。生産側については，一般性を失うことなく，以下の仮定 PD[1] を満たす生産技術を持ち，永遠に活動を続ける企業（あるいは企業の点列）が 1 つだけ存在すると想定する。企業は，若年世代により所有される。ここで第 t 期における生産活動を取り上げると，その期に生まれた若年世代が，期首に老年世代から資本財 k_t を市場価格 ψ_t で購入し，その期間中に生産を行う。生産されるものは，純産出 y_t と資本財 $\tilde{k}_{t+1}$ である[2]。若年世代は第 t 期の期末に，それぞれ価格 p_t と ψ_{t+1} で販売する。

仮定 PD（変形関数）

1）　この仮定は，王朝モデルの生産技術のそれと同一である。仮定の意味については，小平 (1999a) を参照せよ。

2）　これは，資本を流動資本 circulating capital と扱うことを意味する。

(i) $F(y_t,\ \tilde{k}_{t+1},\ k_t)$ は，凸，$(y_t,\ \tilde{k}_{t+1},\ -k_t)$ に関して非減少的，$-k_{1t}$ に関して増加的である。ただし，k_{1t} は第 t 期における資本財 1（例えば，労働）の集計量を表す。

制約 $F(y_t,\ \tilde{k}_{t+1},\ k_t) \leq 0$ は，以下の性質を満たす。

(ii) もし $F(y_t,\ \tilde{k}_{t+1},\ k_t) \leq 0$ であれば，任意の $\lambda > 0$ に対して，$F(\lambda y_t,\ \lambda\tilde{k}_{t+1},\ \lambda k_t) \leq 0$ が成立する。

(iii) 任意の与えられた有界な k_t に対して，y_t と $\tilde{k}_{t+1}$ は上から有界である。

そして

(iv) 集合 $M = \{k > 0 \mid F(y, k, k) < 0, y > 0\}$ は非空である。

(v) 値 $k \in M \cap (0,\ \tilde{k}_1)$ が存在する。ただし，$\tilde{k}_1$ は第 1 期期首の資本財賦存量である。

消費者について，純粋交換モデルと同じ仮定をおく。すなわち

仮定 CO1（効用関数）

各消費者の生涯効用関数，$u^t : R^r_+ \times R^r_+ \to R_+$, $u(x^t_t, x^t_{t+1})$ は，全ての t について厳密に凹，上から一様に有界，非減少的である[3)]。正の消費について連続微分可能である。両期において，消費は必要である。すなわち

$$\lim_{x \to 0}\left\|\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right\| = \infty \qquad \text{全ての } y \geq 0 \text{ について}$$

$$\lim_{y \to 0}\left\|\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right\| = \infty \qquad \text{全ての } x \geq 0 \text{ について}^{4)}$$

最後に，効用関数は，第 t 期と第 $t+1$ 期の両方において，少なくとも

3) 消費 x の上付き添字は世代を，下付き添字は期間を表す。r は，財の種類の数である。モデルの設定，記号の使い方について，詳しくは小平 (1999b) を参照せよ。

4) $\|\ \|$ は，任意の行列ノルムである。

1 つの商品 k に関して増加的であり，そのような商品の集合を K とする。

仮定 CO2（賦存量）

賦存量は非負であり，定常的である（したがって有界である)。すなわち，$\omega_t^{t-1}=\omega_1^0$, $\omega_t^t=\omega_1^1$ であり，かつ $\omega_1^0+\omega_1^1>0$ である。自分の効用が増すような，少なくとも 1 つの商品 k の正の量を，各消費者は第 t 期あるいは第 $t+1$ 期に賦存量として持つ。

仮定 CO3

$\omega_{k,1}^0+m_k^0\geq 0$ であり，ある商品 $k\in K$ については厳密に正である。全ての k について，$\omega_{k,1}^1-m_k^1\geq 0$ である。

仮定 CO4（無差別曲線）

全ての商品 h と k，全ての非 0 消費について，$\dfrac{\left(\frac{\partial u(.)}{\partial x_{h,t+1}^{t}}\right)}{\left(\frac{\partial u(.)}{\partial x_{k,t}^{t}}\right)}\leq\delta$ となるような正の定数 δ が存在する。

以上の仮定の意味を考えよう。労働自体は賦存量 ω の一部であるから，これを第 1 財[5] とすれば，仮定 PD(i)は，k_{1t} が増加するとき，産出量が増加する財が少なくとも 1 つは存在することを意味する。次に，仮定 CO2 は，労働の初期賦存量 $\tilde{k}_{11}=\sum_i\tilde{k}_{i1,1}$ の影の価格が正になることを意味する。これらより，全ての消費者の所得は正になることが示される。仮定 PD (ii)（1 次同次性）は，各期 t において，産出額（当該期の純産出の価値と資本財の期末賦存量の価値の合計）は資本投入額（資本財の期首賦存量の価値）に等しいことを意味する。すなわち，産出は要素報酬として完全分配される。仮定 PD(iii)（有界性）は，k_t が有界である限り，全ての t について産出量

5) この第 1 財を，各消費者が正の量を所有する教育と解釈することもできる。

は有界であることを，(iv)は技術は一定量の全商品を永遠に生産可能にすることを，(v)はこの生産水準に達するのに，利用可能な第 1 期期首の資本財賦存量 $\tilde{k}_1$ で十分であることと，どの資本財も涸渇しない（持続可能性）ことを保証する。

規模に関する収穫不変のために，利潤はない[6]。生産者は第 t 期 $t=1, 2, \ldots$ に，次の問題を解く。

$$\text{(1)} \qquad \max_{k_t,\ \tilde{k}_{t+1} \geq 0,\ y_t} \ p_t y_t + \psi_{t+1} \tilde{k}_{t+1} - \psi_t k_t$$
$$\text{subject to} \quad F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0$$

次に，消費者について検討しよう。先ず，モデルが始まる第 1 期に老年世代としてモデルに登場する第 0 世代の消費者を考えよう。消費者 0 は資本財 $\tilde{k}_1$ を持って登場し，若年期消費 x_0^0 を与えられたものとして，生涯効用が最大になるように，最適な老年期（第 1 期）消費を選択する。彼の第 1 期の収入は，第 1 期期首に若年世代へ売却される資本財 $\tilde{k}_1$ と賦存量から構成される。よって解くべき最適化問題は，次のように表される。

$$\text{(2)} \qquad \max_{x_1^0 \geq 0} u(x_0^0, x_1^0)$$
$$\text{subject to} \qquad p_1 x_1^0 \leq \psi_1 \tilde{k}_1 + p_1 \omega_1^0$$

次に，第 1 世代以降の消費者を考えよう。消費者 $t \neq 0$ の若年期の収入は，自分の賦存量からの所得 $p_t \omega_t^t$ と，生産活動からの純利潤 $p_t y_t$ の 2 項目からなる。一方，支出は資本財の購入（購入額 $\psi_t \tilde{k}_t$），消費（消費支出 $p_t x_t^t$）と貯蓄 S^t からなる。したがって，彼の若年期の予算制約は

$$\text{(3)} \qquad p_t x_t^t + \psi_t \tilde{k}_t + S^t = p_t y_t + p_t \omega_t^t$$

と表される。老年期の収入は，資本財売却（売却額 $\psi_{t+1} \tilde{k}_{t+1}$），賦存量，貯蓄 S^t の取り崩しからなる。この収入を消費へ支出する（消費額 $p_{t+1} x_{t+1}^t$）。したがって，老年期の予算制約は

6) したがって，各期の若年世代が企業を購入するときに，支払いは資本財に対してなされ，価値のない企業それ自体に対してはなされない。

(4) $$p_{t+1}x^t_{t+1} = \psi_{t+1}\tilde{k}_{t+1} + p_{t+1}\omega^t_{t+1} + S^t$$

である。これらは，1 つの富制約に集計することができる。

(5) $$p_t\, x^t_t + p_{t+1}x^t_{t+1} + \psi_t\, \tilde{k}_t = p_t\, y_t + \psi_{t+1}\tilde{k}_{t+1} + p_t\,\omega^t_t + p_{t+1}\,\omega^t_{t+1}$$

規模に関する収穫不変（仮定 PD(ii)）が仮定されているので，企業の収入は全て要素報酬として投入物に分配される。すなわち

$$\psi_t\, \tilde{k}_t = p_t\, y_t + \psi_{t+1}\tilde{k}_{t+1}$$

この式を(5)に代入すると

(6) $$p_t\, x^t_t + p_{t+1}x^t_{t+1} = p_t\,\omega^t_t + p_{t+1}\,\omega^t_{t+1}$$

を得る。(6)は，純粋交換モデル（小平 (1999b)）の式(4)と同じである。このように，生産を伴う経済における消費者 t の富制約は，純粋交換モデルにおけるそれと同じであることが確認される。

消費者 $t \neq 0$ は次の問題を解き，生涯にわたる最適消費計画を得る。

(7) $$\max_{x^t_t,\, x^t_{t+1} \geq 0} u(x^t_t, x^t_{t+1})$$
$$\text{subject to} \quad p_t\, x^t_t + p_{t+1}x^t_{t+1} \leq p_t\,\omega^t_t + p_{t+1}\,\omega^t_{t+1}$$

商品市場と資本財市場は毎期，清算される。すなわち

(8) $$x^{t-1}_t + x^t_t \leq y_t + \omega^{t-1}_t + \omega^t_t \qquad p_t \geq 0$$

(9) $$k_t \leq \tilde{k}_t \qquad \psi_t \geq 0$$

初期金融請求権はないので，S^1 は均衡において 0 である。よって，純粋交換重層世代モデルにおけるのと同じように，全ての S^t も 0 である。重層世代均衡を次のように定義する。

定義（生産が行われ，金融請求権を伴わない重層世代均衡）

価格ベクトル $p^*_t \geq 0, \psi^*_t \geq 0, t = 1, 2, \ldots$ により支持され，任意の t について有界である配分 $x^{t*}_t, x^{t*}_{t+1}, y^*_t, k^*_t, \tilde{k}^*_{t+1}$ は，もしそれが最適化問題(1)，(2)，(7)を解き，市場清算条件(8)，(9)を満たすならば，生産が行われ，金融請求権を伴わない重層世代均衡である。

3. 均衡の存在

均衡の存在は，純粋交換重層世代モデルの場合と同じく，T 期間完全形式を利用して証明される。縮約 T 期間モデルにおいて Warlas 法則を維持するために，最終期の第 T 期に生まれた消費者 T は，第 T 期に老年期を迎えている消費者（消費者 $T-1$）から，資本財を成立している市場価格で購入する。消費者 T は，次の問題を解く。

$$(10)\qquad \max_{x_T^T \geq 0, k_T, \tilde{k}_{T+1} \geq 0} V(x_T^T,\ \tilde{k}_{T+1})$$
$$\text{subject to}\qquad p_T x_T^T + \psi_T k_T \leq p_T \omega_T^T + p_T y_T$$
$$F(y_T,\ \tilde{k}_{T+1},\ k_T) \leq 0$$

ただし，$V(.)$ は，任意の厳密に凹，増加的な効用関数である。この消費者 T の問題(10)は純粋交換モデル（小平 (1999b)）の問題(6)と同じ役割を果たすが，次の点で異なる。

(i) 世代 0 に支払われる金融請求権がないので，x_T^T を非負の値に制約することができる。

(ii) 消費者 T は資本財を売る相手を見つけることができない。つまり，彼には若年期の予算制約(3)があるだけで，借り入れる可能性も貯蓄する誘因もない。よって，$S^T = 0$ である。

(iii) 消費者 T は，最終資本財 $\tilde{k}_{T+1}$ に関して主観的評価を持つ。

均衡の存在は，次のように証明される。

命題 1（生産を伴う重層世代均衡の存在）

仮定 CO1，CO2，CO3，PD が満たされるとしよう。このとき，全ての消費者が非 0 の消費を行う重層世代均衡が存在する。

（証明）

証明は 2 つの部分からなる。純粋交換経済における存在証明（小平 (1999

b))の命題 1）の手順に従うが，実質的には同じであるので詳細は省略する。(I)では，(10)に従い行動する最後の消費者がいる縮約 T 期間モデルに，均衡が存在することを示す。(II)では，T が大きくなるときに，その解が定義の均衡に収束することを示す。

(I) 縮約 T 期間モデルにおける均衡

第 T 期生まれの消費者を追加して，厚生加重 α^t（上付添え字は世代を表す）を持つ(1)，(2)，(7)の T 期間完全形式版を定義する。すなわち

$$(11)\qquad \max_{x_t^{t-1}, x_t^t \geq 0, k_t,\ \tilde{k}_{t+1} \geq 0, y_t,\ t=1,2,\ldots,T} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t u(x_t^t, x_{t+1}^t) + \alpha^T V(x_T^T, \tilde{k}_{T+1})$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & x_t^{t-1} + x_t^t \leq y_t + \omega_t^{t-1} + \omega_t^t && (p_t)\\
& k_1 \leq \tilde{k}_t && (\psi_t)\\
& F(y_1, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0 &&\\
& \overline{p}_t x_t^t + \overline{p}_{t+1} x_{t+1}^t \leq \overline{p}_t \omega_t^t + \overline{p}_{t+1} \omega_{t+1}^t + \varepsilon &&\\
& \qquad\qquad t = 1,2,\ldots,T-1 && (\rho^t)\\
& \overline{p}_1 x_1^0 \leq \overline{\psi}_1 \tilde{k}_1 + \overline{p}_1 \omega_1^0 + \varepsilon && (\rho^0)\\
& \overline{p}_T x_T^T + \overline{\psi}_T k_T \leq \overline{p}_T \omega_T^T + \overline{p}_T y_T + \varepsilon && (\rho^T)
\end{aligned}$$

ただし，x_0^0 と (ρ^T) は所与であり，ベクトル $\alpha = (\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^T)$ と拡張価格ベクトル $(\overline{p}, \overline{\psi}) = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_T, \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_T)$ は単体 S^{T+1} と $S^{(r+r')T}$ の上にある[7]。ε は正の定数である。

このような $(\alpha, \overline{p}, \overline{\psi})$ のそれぞれに対して，問題(11)は実行可能であり，コンパクト値である。仮定 PD(iv)，(v)により，また $\varepsilon > 0$ であることから，(11)は Slater 条件を満たす。したがって，(11)には常に解が存在し，また Lagrange 乗数 p_t，ψ_t，ρ^t も存在する。

段階 1：不動点対応の構築

均衡を得るために，純粋交換経済における存在証明のように，対応関数

7）$\overline{\psi}_1$ と $\overline{\psi}_T$ だけが，パラメーターである。その他の $\overline{\psi}_t$ は，後に必要とされる。また，r は商品の，r' は資本財の種類の数である。

と調整関数を定義する。対応関数は Lagrange 乗数を生みだし，両関数は $T+1$ 個の厚生加重と価格 $(\overline{p}, \overline{\psi})$ を改訂する。このように定義される対応関数と調整関数は，$(\alpha, \overline{p}, \overline{\psi}, p, \psi, \rho)$ からそれ自体の中への対応であり，不動点が存在する。

段階 2：不動点は均衡である

小平 (1999b) の命題 1 の段階 2 と同じ議論を使って，この不動点において，全ての消費者の予算制約が満され（したがって $\rho^t = 0$），同時に $\overline{p}_t$ は p_t に比例しており，各 t について非 0 であるような厚生加重が存在することが証明される。この解は根岸計画の解に一致し，したがって縮約 T 期間モデルの競争均衡である。

(Ⅱ)　T を無限大に延長する

(a)　縮約モデルを定式化し直す

小平 (1999b) の命題 1 の証明の(Ⅱa)と同様に，消費者固有の正規化を行った消費者固有の商品価格

$$\overline{p}_t^t = \lambda^t \overline{p}_t$$
$$\overline{p}_{t+1}^t = \lambda^t \overline{p}_{t+1}$$

を定義する。ここに，λ^t は

$$\sum_k (\overline{p}_{kt}^t + \overline{p}_{k,\,t+1}^t) = 1 \quad \text{世代 } t = 1, 2, \ldots, T \text{ について}$$
$$\overline{p}_1^0 = \lambda^0 \overline{p}_1 \quad \text{世代 0 について，ただし } \sum_k \overline{p}_{k1}^0 = 1$$

となるような正のスカラーである。資本財価格の正規化は，次のようになる。

$$\overline{\psi}_t^t = \lambda^t \overline{\psi}_t \quad t = 1, 2, \ldots, T \text{ について}$$
$$\overline{\psi}_1^0 = \lambda^0 \overline{\psi}_1 \quad \text{世代 0 について}$$

(Ⅰ)の第 2 段階で示したように，各 t について $\overline{p}_t$ は非 0 であるので，これらの正規化は実行可能である。(Ⅰ)より α^t, $\overline{p}_t^t$, $\overline{p}_{t+1}^t$, $\overline{\psi}_1^0$, $\overline{\psi}_T^T$, x_T^T, $\tilde{k}_{T+1}$ の均衡値が従う。ここで，この均衡値における第 1 期から第 $T-1$ 期まで

の配分は，期間 t の商品バランスと変形関数のそれぞれにおいて，消費者 T の消費 x_T^T と $\tilde{k}_{T+1}$ の選択を与えられたものとしながら，消費者 T を外した次の計画からも得ることができる。

$$(12) \quad \max_{x_t^{t-1},\, x_t^t \geq 0,\, k_t,\, \tilde{k}_{t+1} \geq 0,\, y_t,\, t=1,2\ldots,T-1,\, x_T^{T-1} \geq 0,\, k_T \geq 0,\, y_T} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t u(x_t^t, x_{t+1}^t)$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to} \quad & x_t^{t-1} + x_t^t \leq y_t + \omega_t^{t-1} + \omega_t^t && (p_t) \\
& k_1 \leq \tilde{k}_t && (\psi_t) \\
& F(y_t, \tilde{k}_{t+1}, k_t) \leq 0 && \\
& \overline{p}_t^t x_t^t + \overline{p}_{t+1}^t x_{t+1}^t \leq \overline{p}_t^t \omega_t^t + \overline{p}_{t+1}^t \omega_{t+1}^t && \\
& \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1 && (\rho^t) \\
& \overline{p}_1^0 x_1^0 \leq \overline{\psi}_1^0 \tilde{k}_1 + \overline{p}_1^0 \omega_1^0 && (\rho^0) \\
& \overline{p}_T^T x_T^T + \overline{\psi}_T^T k_T \leq \overline{p}_T^T \omega_T^T + \overline{p}_T^T y_T && (\rho^T)
\end{aligned}$$

もし，ある有限の T について，(I)において縮約 T 期間モデルの均衡値として見つけられたとの組み合わせが，偶然，無限計画視野重層世代モデルの定義された均衡になることがあれば，期間 $t = 0, 1, \ldots, T-1$ について，(12)の解は無限計画視野重層世代の均衡でもある。そのような組み合わせを，次のようにして見つけることができる。

(b) 消費者固有価格への収束

(I)において，それに対して縮約 T 期間均衡が存在するような x_T^T と $\tilde{k}_{T+1}$ の組み合わせを少なくとも 1 つは見つけることができることが示された。しかし，そのような組み合わせは複数存在する可能性があり，複数存在する場合には，それらの 1 つ 1 つに，少なくとも 1 つの解，$(\overline{p}_t^t, \overline{\psi}_t^t)$, $t = 1, 2, \ldots, T-1$ が対応する。ここでは，T が大きくなるにつれて，そのような価格経路の集合は縮小して，最終的には望ましい x_T^T と $\tilde{k}_{T+1}$ の値を生み出すことを示す。

純粋交換経済の存在証明のように，消費者固有の拡張価格ベクトル $(\overline{p}_t^t, \overline{p}_{t+1}^t, \overline{\psi}_t^t)$ について 2 期間価格ベクトル q^t と，それに関係する可能な均

衡点列の集合 $Q(T)$ を定義する。均衡点列集合は非空であり，無限大に近付く T に対して，収束することを示すことができる。

(c) 価格の導出

小平 (1999b) の命題 1 の証明の(Ⅱc)と同様に，消費者 0 の正規化を利用して価格 p_t を導出する。また，この正規化を使えば，ψ_t も導出される。もし T が有限であれば，初期資本 $\psi_1 \tilde{k}_1$ の価値は有限になり，第 2 期以降のストックの値も全て有限になる。しかし，計画視野が無限大のときには，厚生（効用の加重和）は有界ではない可能性があるので，$\psi_1 \tilde{k}_1$ の有界性を証明しなければならない。そのために，ここで $\psi_1 \tilde{k}_1$ は有界ではないと仮定すると，消費者 0 の所得は無限大になる。消費者 0 固有価格は合計 1 になるように正規化されており（上を見よ），仮定 CO1 により，消費者 0 の効用関数は非飽和である（彼は遺産を遺さない）。したがって彼の需要は無限大になるはずであり，これは均衡ではあり得ない。ゆえに，$\psi_1 \tilde{k}_1$ は有界である。

さらに，均衡において，y_1 は下から有界であり，第 1 期の価格の合計は 1 になるので，$p_1 y_1$ は下から有界である。規模に関する収穫不変により，$\psi_2 \tilde{k}_2 = \psi_1 \tilde{k}_1 - p_1 y_1$。ゆえに，$\psi_2 \tilde{k}_2$ も有界である。$t = 1$ についての(12)の資本財制約における影の価格として現れる ψ_1 は，制約条件が成立するので，有界である。p_2 が有界であるので，この手続きを $t = 2, 3, \ldots$ について繰り返すことができる。よって，有限の t について，ψ_t は有界である。ゆえに，任意の有限の t について，p_t と ψ_t は有界である。

(d) 消費者需要とその企業による純供給の点列の収束

消費者需要については，小平 (1999b) の命題 1 の証明の(Ⅱd)を見よ。このとき，企業の第 t 期の供給は需要により決定され，したがって需要と純供給は収束する。

以上で，均衡の定義の全ての条件が確認された。したがって，生産を伴う重層世代均衡は存在する。（証了）

純粋交換モデルと同様に，無限大において価格 (p_t, ψ_t) が非有界になる可能性がある。例えば次のように企業の変形関数を制限することによって，この可能性を回避することができる。

仮定 PD′

資本財の種類の数 r' は，商品の種類の数 r に等しい。変形関数は仮定 PD を満たし

$$F(y_t, k_{t+1}, k_t) = \max_h (y_{ht} + G_h(k_{t+1}) - k_{ht})$$

と書ける。ただし，下付き添字 h は商品を指す。

この仮定の意味は，資本財を通常の商品として取り扱い，与えられた資本財を消費 y_{ht} にも，あるいは資本蓄積にも利用可能であると想定することである。仮定 PD′の下では，商品バランスは次のように表される。

$$y_{ht} + G_h(k_{t+1}) \leq k_{ht} \qquad h = 1, 2, \ldots, r$$

命題 2

仮定 PD′の下で，またもし $\left\| \frac{\partial G(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} \right\| \leq \delta$ ならば，生産を伴う重層世代モデルにおいて商品価格は

$$\delta \| p_t \| \geq \| p_{t+1} \| \qquad t = 1, 2, \ldots$$

を満たす。ただし，δ は 0 より小さな正の定数である。

(証明)[8]

次の根岸問題を考えよう。α^t, x_T^T, $\tilde{k}_{T+1}$ の与えられた均衡値に対して

$$\text{(13)} \qquad \max_{x_t^{t-1},\, x_t^t \geq 0,\, k_{t+1} \geq 0,\, t=1,2,\ldots,T-1,\, x_T^{T-1} \geq 0} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t u(x_t^t, x_{t+1}^t)$$

$$\text{subject to} \quad x_t^{t-1} + x_t^t + G(k_{t+1}) \leq y_t + \omega_t^{t-1} + \omega_t^t \qquad (p_t)$$

8) ここでは，Geanakoplos and Polemarchakis (1991) の結果を利用している。

ただし，y_t と $\tilde{k}_{t+1}$ が消去されている。k_{t+1} に関する 1 階の条件は

(14) $$p_t\, G' \geq p_{t+1} \perp k_{t+1} \geq 0$$

を意味する。ただし，$G' = \frac{\partial G(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}$。もし $\|G'\| \leq \delta$ であれば，行列ノルムの定義により，$\delta\|p_t\| \geq \|p_t\, G'\|$。(14)により，$\|p_t\, G'\| \geq \|p_{t+1}\|$。よって，$\delta\|p_t\| \geq \|p_{t+1}\|$ であり，十分大きな T に対して，この点列は無限に拡張できる。したがって，$\|p_t\|=1$ という正規化に対して，$\lim_{t\to\infty} p_t = 1$ が成立する。(証了)

条件 $\left\|\frac{\partial G(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}\right\| \leq \delta$ は，想定されている生産技術の下では，全商品の供給を正の率で成長させることが可能であることを意味する。もしこのノルムが 1 に等しいならば，$\|p_t\| \geq \|p_{t+1}\|$ であり，無限大にならない定常価格が可能である。もしノルムが 1 を超えるならば，(14)から分かるように，ある h について $k_{h,t+1}$ が 0 にならないならば，価格は無限大になる。

4. 均衡の非効率性と不確定性

生産を伴うモデルについても，非効率性を議論することができる。特に，もし価格が 0 になるならば，配分は効率的であることを示すことができるので，命題 2 において成立する配分は効率的である。

もし価格が時間を超えて 0 にならないならば，純粋交換重層世代モデルについて示された非効率性のための十分条件（消費者の支出関数の曲率が有界であることと $\lim_{T\to\infty}\sum_{t=t_0}^{T}\frac{1}{\|p_t\|}<\infty$）は，ここでも当てはまる。

もし $\left\|\frac{\partial G(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}\right\| \leq \delta$ であるが，$\delta=1$ を排除できないならば，価格が無限大になることはなく，したがって上の極限条件は成立せず，非効率性は確立されない。しかし，価格は 0 にもならないので，効率性も保証されない。

効率性が確立される場合には，均衡の確定性を証明することも可能であ

るが，一般的には純粋交換経済の議論（小平 (1999b) 第 5 節参照）が当てはまる。

参照文献

Geanakoplos, J. D., and H. M. Polemarchakis (1991), "Overlapping generations," in W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 4, North-Holland.

小平裕 (1999a)「王朝モデル：無限計画視野の一般均衡」，成城大学『経済研究』第 145 号，55-67 ページ。

小平裕 (1999b)「純粋交換の重層世代モデル：無限計画視野の一般均衡」，成城大学『経済研究』第 146 号，59-79 ページ。