Mathematica と MPSGE による応用一般均衡分析

小　平　　裕

1. はじめに

本稿の目的は，応用一般均衡分析を行う場合についての Mathematica[1)]と MPSGE[2)] という２種類のソフトウェアの使い方を確認するとともに，それぞれのソフトウェアの長所，短所を比較することである。

ここで，Mathematica は汎用の数式処理ソフトウェアであり，これを使って一般均衡体系の均衡解を求めるには非線形方程式の解法アルゴリズム Newton 法に基づく組み込み関数 `FindRoot` を利用する。Newton 法は，計算効率は高いが，均衡解を求められない場合があるといわれている[3)]。

1) http://www.wolfram.com
2) http://www.gams.com
3) 小平 (1992) 参照。

他方，MPSGE (Mathematical Programming System for General Equilibrium) は，Rutherford (1989) が開発した応用一般均衡分析のための専用ソフトウェアであり，現在では解法プログラムの１つとして数理計画法解法パッケージ GAMS (General Algebraic Modeling System) に組み入れられており，GAMS/MPSGE として利用可能である。この MPSGE は，(i) 均衡解の存在を定性的に示すことができる一般均衡体系については，均衡解を数値的に必ず求めることができるが，Newton 法に比べて計算効率が劣る Scarf (1967) タイプの不動点アルゴリズムと，(ii) 上で紹介した Newton 法とを組み合わせた混合アルゴリズム（Mathiesen (1987) の SLCP アルゴリズム）を採用しており，場合に応じて利用するアルゴリズムを切り替えるので，効率的に均衡解を求めることができる。さらに MPSGE には，応用一般均衡分析のための専用ソフトウェアということから，効用関数や生産関数が CES 型（代替の弾力性一定）[4] の場合にはモデルの入力が非常に容易であるという特徴がある。

本稿では，Shoven and Whalley（1992，第３章）の２要素モデルの数値例（第３節と第７節）を例題として取り上げて，これら２種類のソフトウェアを使って実際に解いてみることにする。ここで，Shoven and Whalley の２要素モデルのうち第３節の数値例は税を含まない基本モデルであり，第７節の数値例は税を含むように拡張されたモデルである。両モデルの基本構造は同一であり，以下に紹介するように，効用関数と生産関数は CES 型と想定されているので，MPSGE を適用するのに都合がよい。同じ数値例を両ソフトウェアで解き均衡解を求めることを通じて，それぞれの使い方を確認すると同時に，それぞれの長所，短所を比較する。

4） CES 型関数は，代替の弾力性が１の場合には Cobb-Douglas 型，０の場合には Leontief 型と同値であることが知られているので，この仮定はそれ程，制約的ではない。

2. 基本モデルの体系

最初に，Shoven and Whalley (1992) の税を含まないモデル（第3章第3節）を紹介しよう。Shoven and Whalley はこのモデルを基本モデル[5] と呼んでいる。

この経済には N 種類の財，2種類の生産要素（資本と労働）が存在し，これらは多数の経済主体が参加する市場において取り引きされる。経済主体はその活動により，自らの必要を満たすために保有する生産要素を供給して所得を得て，財の組合せを需要し消費する消費者と，生産要素や他の財の中間投入を使ってある財を生産し供給する生産者（＝企業）の２つのタイプに分類される。

市場で成立している価格体系（全ての財と生産要素の価格）を与えられたものと見なして，消費者は予算制約の下で効用最大化を，企業は生産技術の制約の下で利潤最大化を図ることを通じて，各経済主体は全ての財と生産要素について分権的に個別需給計画を立案する。

財市場の需要側には，M 人の消費者がいる。第 m 消費者 (m=1, ..., M) の第 i 財 (i=1, ..., N) の需要

$$(2.1) \qquad X_i^m = X_i^m(p_1, \ldots, p_N, r, w) \qquad i = 1, \ldots, N$$

は，効用最大化問題

$$(2.2) \qquad \underset{\{X_1^m, \ldots, X_N^m\}}{\text{maximize}}\, U^m(X_1^m, \ldots, X_N^m)$$
$$\text{subject to} \qquad \sum_{i=1}^{N} p_i X_i^m = r\overline{K}^m + w\overline{L}^m$$

から導出される。ここに，X_i^m は第 m 消費者の第 i 財の需要量であり，

5) 基本モデルについて詳しくは，Shoven and Whalley （1992, 訳書 pp. 40-41）参照。

$\overline{K}^m$ と $\overline{L}^m$ は資本と労働の要素保有量である。また，p_i は第 i 財の価格であり，r と w は資本と労働の要素価格（資本賃貸率と賃金率）である。効用関数 $U^m(\cdot)$ は厳密に擬凹かつ微分可能であると仮定すると，(2.2) の解すなわち需要関数 (2.1) は価格に関して 0 次同次となる。これは貨幣錯覚がないという経済的性質を意味する。

第 i 財 (i=1, ..., N) の生産は 1 つの企業（それを第 i 企業と呼ぶ）によってのみ行われると考えると，生産側（財市場の供給側）は N 社の企業により構成される。第 i 企業の生産技術は生産関数

$$(2.3) \qquad Q^i = Q^i(K^i, L^i)$$

により表される。ただし，Q^i は第 i 企業の生産量，すなわち第 i 財の市場供給量である。また，K^i と L^i は，第 i 企業の資本と労働の要素投入量（＝要素需要量）である。ここで，生産技術は規模に関して収穫不変であると想定すると，この関数は要素投入量に関して 1 次同次になる。

第 i 企業の要素需要関数（派生需要）は，費用最小化問題

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} &\underset{\{K^i, L^i\}}{\text{minimize}}(rK^i + wL^i) \\ &\text{subject to} \qquad Q^i = Q^i(K^i, L^i) \end{aligned}$$

を解いて求められ，

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} K^i &= K^i(r, w, Q^i) \\ L^i &= L^i(r, w, Q^i) \end{aligned}$$

と表される。規模に関して収穫不変の生産技術（1 次同次の生産関数 (2.3)）を想定しているので，要素需要関数 (2.5) は要素価格 (r, w) に関して 0 次同次になり，要素需要関数も貨幣錯覚がないという経済的性質を持つ。

経済全体として，これらの個別計画が経済全体として相互に整合的である保証はない。つまり，財と生産要素について，個別の需要と供給を全て

の主体について集計して得られる市場需要と市場供給が常にバランスするとは限らない。市場の需給バランスは適切な価格の組み合わせ $(p_1, ..., p_N, r, w)$ の下においてのみ成立し，そのとき初めてこれらの個別計画は相互に整合的となり同時に実行することが可能になる。整合性をもたらすこのような価格組み合わせは均衡価格と呼ばれ，そのとき成立する資源配分と共に一般均衡を構成する。

このShoven and Whalleyモデルにおいては，均衡価格は全ての財および要素の超過需要が同時にゼロもしくは負になるような，すなわち次の3つの不等式

(2.6)
$$\sum_{m=1}^{M} X_i^m(p_1, ..., p_N, r, w) - Q^i \leq 0 \qquad i = 1, ..., N$$
$$\sum_{i=1}^{N} K^i(r, w, Q^i) - \sum_{m=1}^{M} \overline{K}^m \leq 0$$
$$\sum_{i=1}^{N} L^i(r, w, Q^i) - \sum_{m=1}^{M} \overline{L}^m \leq 0$$

が同時に成立するような全ての財と要素の価格の組み合わせ $(p_1, ..., p_N, r, w)$ として定義される。ここに第 i 企業の産出量，すなわち第 i 財の市場供給量 Q^i は (2.3) により与えられる。

生産技術は規模に関して収穫不変であると想定したので，もし第 i 企業の産出量が正であれば，以上に加えて一般均衡では利潤ゼロ条件が成立する。すなわち

(2.7)
$$p_i\, Q^i = rK^i(r, w, Q^i) + wL^i(r, w, Q^i)$$

このモデルでは，Walras法則は

(2.8)
$$\sum_{i=1}^{N} p_i \left(Q^i - \sum_{m=1}^{M} X_i^m \right) + r \left(\sum_{i=1}^{N} \overline{K}^i - \sum_{m=1}^{M} K^m \right) + w \left(\sum_{i=1}^{N} L^i \right.$$

$$-\sum_{m=1}^{M}\overline{L}^{m}\Bigg)\equiv 0$$

と表される。ここで，式 (2.8) は恒等式であることに注意して欲しい。すなわち，価格体系 $(p_1,...,p_N,r,w)$ が均衡価格でない場合にも，Walras 法則は成立する。また需要関数の 0 次同次性から，適当な価格正規化を行うことができる。本稿では，労働の要素価格（賃金率）w=1 とする価格正規化を採用する。

以上で，税を含まない基本モデルを表す理論的枠組みの構築が終わった。この一般均衡体系を数値的に解いて均衡解を求めるのは，その解法に Mathematica を利用するにせよ，MPSGE を利用するにせよ，理論モデルを数値モデルに変換する必要がある。すなわち，一般的な関数として定式化された効用関数 (2.2) や生産関数 (2.4) について，関数形を Cobb-Douglas 型あるいは CES 型などと具体的に与えて，さらに関数のパラメーターや初期保有量などの数値を特定する必要がある。それについては第 4 節で行う。次節では，Mathematica を利用して一般均衡体系を解く場合の解き方の方針（手順）を検討する。

3. Shoven and Whalley の解き方

数値モデルとして表された一般均衡体系を汎用の数式処理ソフトウェアである Mathematica を使って解き，均衡解を数値的に求めるには，解き方（解法の方針）を検討する必要がある[6)]。ここでは，Shoven and Whalley (1992) が採用した解き方を説明しよう。Shoven and Whalley は，解空間の次元を生産要素の数まで引き下げてこのモデルを解いている。解空間次元削減の手続き[7)] は以下の通りである。

6） 応用一般均衡分析のための専用ソフトウェア MPSGE を利用する場合には，モデルの方程式体系を特定すれば，MPSGE が自動的に均衡解を求めるので，解法の方針を検討する必要はない。

7） 解空間次元削減の手続きについては，Shoven and Whalley（1992，訳書

ステップ1

与えられた資本と労働の要素価格 r と w の下で，第 i 財の産出1単位当たりの費用最小化要素需要

(3.1) $$\frac{K^i}{Q^i} = k^i(r, w, 1) \qquad i = 1, ..., N$$

$$\frac{L^i}{Q^i} = l^i(r, w, 1)$$

を求める。

ステップ2

費用最小化要素需要 (3.1) が与えられると，利潤ゼロ条件 (2.7) が成立しているので，第 i 財の価格 p_i は要素価格 (r, w) の関数

(3.2) $$p_i(r, w) = rk^i(r, w, 1) + wl^i(r, w, 1) \qquad i = 1, ..., N$$

として与えられる。

ステップ3

財の価格 $p_i(r, w)(i = 1, ..., N)$ が与えられると，第 m 消費者の第 i 財需要は，要素価格 (r, w) の関数として表される。

(3.3) $$X_i^m(r, w) = X_i^m\left(p_1(r, w), ..., p_N(r, w), r, w\right)$$
$$i = 1, ..., N, m = 1, ..., M$$

ステップ4

第 i 企業 $(i = 1, ..., N)$ の生産要素需要（派生需要）を，次のようにして求める。まず，各財の個人需要 (3.3) を集計して市場需要（下の (3.4) の右辺）を求める。各企業の生産量 Q^i は市場需要を満たすように決まる。す

pp. 41-42) 参照。

なわち，

$$(3.4) \qquad Q^i(r,w)=\sum_{m=1}^{M} X_i^m(r,w) \qquad i=1,\ldots,N$$

最後に，生産量 Q^i が与えられると，各企業の生産要素需要（派生需要）

$$(3.5) \qquad K^i(r,w)=k^i(r,w,1)\times Q^i(r,w) \qquad i=1,\ldots,N$$
$$L^i(r,w)=l^i(r,w,1)\times Q^i(r,w)$$

は，要素価格 (r, w) の関数として計算される。

ステップ 5

生産要素の集計的超過需要

$$(3.6) \qquad \rho_k(r,w)=\sum_{i=1}^{N} K^i(r,w)-\sum_{m=1}^{M}\overline{K}^m$$
$$\rho_l(r,w)=\sum_{i=1}^{N} L^i(r,w)-\sum_{m=1}^{M}\overline{L}^m$$

を求める。

その理論モデルを第 2 節で示した一般均衡体系の均衡解を見付けるという問題は，(2.6) に示されるように，すべての財および要素の市場（つまり，N+2 市場）において需給を同時にバランスさせるような N+2 個の価格の組み合わせ $(p_1,\ldots,p_N,r,w)$ を見付けることであるが，上の手続きにおいて，第 i 財 $(i=1,\ldots,N)$ の需給が常に一致していることはステップ 4 で保証されている（式 (3.4) 参照)。すなわち，Walras 法則 (2.8) の左辺第 1 項は常にゼロとなる。

したがって，均衡解を見付けるという問題は，ここでは，要素市場（つまり，2 市場）のみに注目して，資本と労働の需給を同時にバランスさせるような価格の組み合わせを見付ける問題に帰着する。しかも，生産要素の

超過需要 (3.6) は要素価格 (r, w) のみの関数となるから，これは資本と労働の需給がバランスする要素価格の組み合わせ (r, w)（つまり，2個の価格の組み合わせ）を見付ける問題に帰着する。しかし，与えられた任意の（正の）要素価格の組み合わせ (r, w) に対して，資本と労働の超過需要 $\rho_k(r,w)$ と $\rho_l(r,w)$ の値が常に 0 になる保証はない[8)]。均衡要素価格は，$\rho_k(r,w)$ と $\rho_l(r,w)$ が同時にゼロとなるような (r, w) の値として求めることができる。

4. 基本モデルの数値例

第2節の一般均衡体系を解いて均衡解を数値的に求める，すなわち均衡要素価格の値がいくつになるか計算するには，効用関数や生産関数の関数形を特定した上で，必要なパラメーターの値を与えて，理論モデルを数値モデルに変換する必要がある。

本稿では数値例として，第2節で紹介した基本モデルにおいて N=2, M=2 (R と P) と特定した Shoven and Whalley（1992，第3章第3節）の小規模な一般均衡モデルを利用する[9)]。すなわち，財は2種類（製造業品 i=1 と非製造業品 i=2)，生産要素は2種類（資本 K と労働 L)，消費者も2人（富裕消費者 m=R と貧困消費者 m=P）という2財2要素2消費者モデル（いわゆる，2×2×2 モデル）を取り上げる。初期保有については，富裕消費者 R は資本 K のみを，貧困消費者 P は労働 L のみを所有するものとし，どちらの消費者も初期保有として財を所有しないと想定する。

両消費者の効用関数の関数形を CES 型（代替の弾力性一定）と特定する。すなわち，

8) ただし，任意の要素価格 r と w に対して超過需要額の和は常にゼロであること，すなわち $r\rho_k(r,w)+w\rho_l(r,w)\equiv 0$ が成立することは，Walras 法則 (2.8) により保証されている。

9) Shoven and Whalley（1992，表3.1，訳書 pp. 42-45）参照。この数値例は，もともと Shoven and Whalley (1984) で定式化されたものである。

$$(4.1) \qquad U^m = \left(\sum_{i=1}^{2} (\alpha_i^m)^{\frac{1}{\mu^m}} (x_i^m)^{\frac{\mu^m - 1}{\mu^m}} \right)^{\frac{\mu^m}{\mu^m - 1}}$$

ただし，U^m は第 m 消費者 ($m=R, P$) の効用水準，x_i^m は第 i 財 ($i=1, 2$) の需要量であり，α_i^m は効用における第 i 財の加重，μ^m は代替の弾力性である。

効用関数が (4.1) のように CES 型である場合には，予算制約の下での効用最大化問題 (2.2) を解析的に解くことができ，第 m 消費者の需要関数 (2.1) は具体的に，

$$(4.2) \qquad x_i^m = \frac{\alpha_i^m (r\overline{K}^m + w\overline{L}^m)}{(p_i)^{\mu^m} \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^m (p_i)^{1-\mu^m} \right)}$$

と求めることができる。ただし，p_i は第 i 財の価格，r と w は資本と労働の要素価格であり，$\overline{K}^m$ と $\overline{L}^m$ は第 m 消費者の資本と労働の初期保有量である。

効用関数のパラメーターおよび初期保有について，Shoven and Whalley の想定する数値は以下の通りである。

	富裕消費者 $m=R$	貧困消費者 $m=P$
効用関数		
財の加重		
第 1 財（製造業品）	$\alpha_1^R = 0.5$	$\alpha_1^P = 0.3$
第 2 財（非製造業品）	$\alpha_2^R = 0.5$	$\alpha_2^P = 0.7$
代替の弾力性	$\mu^R = 1.5$	$\mu^P = 0.75$
初期保有		
資本	$\overline{K}^R = 25$	$\overline{K}^P = 0$
労働	$\overline{L}^R = 0$	$\overline{L}^P = 60$

このうち，$\overline{L}^R=\overline{K}^P=0$ は上の想定による。

第 i 企業（製造業 i=1 と非製造業 i=2）の生産技術も，CES 型生産関数

$$Q^i=\phi^i\left(\delta^i(K^i)^{\frac{\sigma^i-1}{\sigma^i}}+(1-\delta^i)(L^i)^{\frac{\sigma^i-1}{\sigma^i}}\right)^{\frac{\sigma^i}{\sigma^i-1}} \tag{4.3}$$

により与えられると想定する。ただし，Q^i は第 i 企業の生産量，K^i と L^i は資本と労働の要素投入量（要素需要量）であり，ϕ^i は生産関数の規模係数，δ^i は資本ウエイト，σ^i は要素の代替弾力性である。

生産関数 (2.3) も (4.3) のように CES 型であると想定すると，技術制約の下での利潤最大化問題 (2.4) を解析的に解くことができ，両企業の要素需要 (2.5) は具体的に，

$$K^i=\frac{Q^i}{\phi^i}\left[\delta^i+(1-\delta^i)\left(\frac{\delta^i}{1-\delta^i}\frac{w}{r}\right)^{1-\sigma^i}\right]^{\frac{\sigma^i}{1-\sigma^i}} \tag{4.4}$$

$$L^i=\frac{Q^i}{\phi^i}\left[\delta^i\left(\frac{1-\delta^i}{\delta^i}\frac{r}{w}\right)^{1-\sigma^i}+(1-\delta^i)\right]^{\frac{\sigma^i}{1-\sigma^i}}$$

と求めることができる。生産関数のパラメーターの数値は，以下のように想定される。

	第 1 企業 （製造業）	第 2 企業 （非製造業）
規模係数	$\phi^1=1.5$	$\phi^2=2.0$
要素ウエイト	$\delta^1=0.4$	$\delta^2=0.3$
要素の代替弾力性	$\sigma^1=2.0$	$\sigma^2=0.5$

次節では，効用関数と生産関数の関数形を CES 型とし，パラメーターの数値をこのように特定した基本モデルを，Mathematica を使い第 3 節の

解法方針に沿って解く様子を説明しよう。

5. Mathematica で基本モデルを解く

数値モデルへの変換が終わったので，いよいよ Mathematica を使って Shoven and Whalley（1992，第3章第3節）の基本モデルを解いてみよう[10]。

Mathematica を起動し，現れる入力画面（ノートブック notebook と呼ばれる）に，上の解法方針にしたがって入力していこう。解空間次元削減の手続きステップ1の準備として，最初に需要関数 (4.2) を導出する。そのためには，CES 型効用関数 (4.1) を入力して，効用最大化問題 (2.2) を解く必要がある。

```
In[1]:= u = (alpha1 ^ (1 / mu) * x1 ^ ((-1 + mu) / mu) +
            alpha2 ^ (1 / mu) * x2 ^ ((-1 + mu) / mu)) ^ (mu / (mu - 1))
```

Out[1]= $\left(\mathrm{alpha1}^{\frac{1}{\mathrm{mu}}}\ \mathrm{x1}^{\frac{-1+\mathrm{mu}}{\mathrm{mu}}}+\mathrm{alpha2}^{\frac{1}{\mathrm{mu}}}\ \mathrm{x2}^{\frac{-1+\mathrm{mu}}{\mathrm{mu}}}\right)^{\frac{\mathrm{mu}}{-1+\mathrm{mu}}}$

ここでは，ギリシャ文字[11] を英語名で表記しており，また消費者を区別する上付添え字 $m=R, P$ を省略している。つまり，入力配列 `In [1]` の `alpha1` と `alpha2` は効用関数の加重 α_1^m と α_2^m，`mu` は代替の弾力性 μ^m を意味する。なお，例えば $(\alpha_1^m)^{\frac{1}{\mu^m}}(x_1^m)^{\frac{\mu^m-1}{\mu^m}}$ を

```
alpha1^(1/mu)*x1^((-1+mu)/mu)
```

と表しているが，version 3 以降の Mathematica では，「基礎的な入力」BasicInput を選択し数式エディタ風の入力パレット Palettes を利用して，通常の数式のような形式で入力することも可能である。

効用最大化問題 (2.2) の最適解は，(i) 最適解における無差別曲線の傾き（＝限界代替率 $\mathrm{MRS}=\frac{\partial U^m}{\partial x_1^m}/\frac{\partial U^m}{\partial x_2^m}$）と予算線の傾き（＝相対価格 $\frac{p_1}{p_2}$）が等し

10) Mathematica の基本的な操作については，小平（2002b）参照。
11) Mathematica ではギリシャ文字を入力するには，escape キーを使用する。小平（2002b，注8），Wolfram（1996，訳書 1998，1.10.1）参照。

い（必要条件），(ii) 最適解は予算制約式を満たす（十分条件）という２つの条件から求められることが知られている。しかし，この方針を直接に適用しようとしても「超越関数」であることが問題となり，このままでは Mathematica は解いてくれない[12)]。この問題を回避するために，限界代替率＝相対価格の条件（効用最大化の１階の条件，必要条件）から，第２財（非製造業品）需要 x2 を第１財（製造業品）需要 x1 の関数として表し，さらにそれが１次関数であることを明示した上で，予算制約式と連立させて解くことにする。ただし，入力配列 In[3] の m は消費者の予算であり，$r\overline{K}^m + w\overline{L}^m$ に等しい。

```
In[2]:= sol1 = Simplify[
          x2 /. Solve[D[u, x1] / D[u, x2] == p1 / p2, {x2}] [[1]]]

     Solve::ifun : 逆関数がSolve
        により使用されているので，求められない解のある可能性があります.
```

$$\text{Out[2]=}\quad \left(\frac{\text{alpha1}^{-1/\text{mu}}\ \text{alpha2}^{\frac{1}{\text{mu}}}\ \text{p1}\ \text{x1}^{\frac{1}{\text{mu}}}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}$$

```
In[3]:= sol$d = Solve[{x2 == (p1 / p2) ^ mu * alpha2 / alpha1 * x1,
           p1 * x1 + p2 * x2 == m}, {x1, x2}]
```

$$\text{Out[3]=}\quad \left\{\left\{\text{x1} \to \frac{\text{alpha1 m}}{\text{alpha1 p1} + \text{alpha2}\ \left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}\ \text{p2}},\ \text{x2} \to \frac{\text{alpha2 m}\ \left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}}{\text{alpha1 p1} + \text{alpha2}\ \left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}\ \text{p2}}\right\}\right\}$$

出力配列 Out[3] が，第 m 消費者 (m=R, P) の第 i 財 (i=1, 2) の需要関数 (4.2) を与える。

ここで，効用関数のパラメーターおよび初期保有について，想定した数値を代入する。

```
In[4]:= p$demand$x1 = x1 /. sol$d[[1]] /.
          {m -> 60 * w, mu -> 0.75, alpha1 -> 0.3, alpha2 -> 0.7}
```

$$\text{Out[4]=}\quad \frac{18.\ \text{w}}{0.3\ \text{p1} + 0.7\ \left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{0.75}\ \text{p2}}$$

12) Cobb-Douglas 型の効用関数を想定すれば，この方針で需要関数を導出することができる。小平（2002b，第 3.2 節）参照。本稿では，効用関数は CES 型を仮定している。

```
In[5]:= p$demand$x2 = x2 /. sol$d[[1]] /.
          {m -> 60 * w, mu -> 0.75, alpha1 -> 0.3, alpha2 -> 0.7}
```

$$\text{Out[5]=}\quad \frac{42.\ (\frac{p1}{p2})^{0.75}\ w}{0.3\ p1 + 0.7\ (\frac{p1}{p2})^{0.75}\ p2}$$

Out[4] と Out[5] はそれぞれ，貧困消費者 $m=P$ の製造業品 $i=1$ と非製造業品 $i=2$ の需要関数である。

```
In[6]:= r$demand$x1 = x1 /. sol$d[[1]] /.
          {m -> 25 * r, mu -> 1.5, alpha1 -> 0.5, alpha2 -> 0.5}
        General::spell1 :
         スペル間違いの可能性があります. 新規シンボル "r$demand$x1"
           はすでにあるシンボル "p$demand$x1" に似ています.
```

$$\text{Out[6]=}\quad \frac{12.5\ r}{0.5\ p1 + 0.5\ (\frac{p1}{p2})^{1.5}\ p2}$$

```
In[7]:= r$demand$x2 = x2 /. sol$d[[1]] /.
          {m -> 25 * r, mu -> 1.5, alpha1 -> 0.5, alpha2 -> 0.5}
        General::spell1 :
         スペル間違いの可能性があります. 新規シンボル "r$demand$x2"
           はすでにあるシンボル "p$demand$x2" に似ています.
```

$$\text{Out[7]=}\quad \frac{12.5\ (\frac{p1}{p2})^{1.5}\ r}{0.5\ p1 + 0.5\ (\frac{p1}{p2})^{1.5}\ p2}$$

同様に，Out[6] と Out[7] は富裕消費者 $m=R$ の製造業品 $i=1$ と非製造業品 $i=2$ の需要関数である。

```
In[8]:= f = phi * (delta * L ^ ((sigma - 1) / sigma)
               + (1 - delta) * K ^ ((sigma - 1) / sigma))
             ^ (sigma / (sigma - 1))
```

$$\text{Out[8]=}\quad \left((1-\text{delta})\ K^{\frac{-1+\text{sigma}}{\text{sigma}}} + \text{delta}\ L^{\frac{-1+\text{sigma}}{\text{sigma}}}\right)^{\frac{\text{sigma}}{-1+\text{sigma}}}\ \text{phi}$$

生産側の定式化に進もう。生産関数 (4.3) を入力する。ここでも，ギリシャ文字を英語名で表記していることと，また企業を区別する上付添え字 $i=1, 2$ を省略していることは，入力配列 In[1] と同様である。つまり，入力配列 In[8] の phi は生産関数の規模係数 ϕ^i，delta は資本の加重 δ^i，sigma は代替の弾力性 σ^i を表している。

次は，技術制約の下での利潤最大化から要素需要関数 (4.4) の導出である。費用最小化条件から求めようとすると，消費者の需要関数を導いたときと同様に超越関数であることが問題となるので，まず限界代替率＝要素

価格比（費用最小化の1階の条件，必要条件）から労働需要 L を資本需要 K の関数として求め，生産関数に代入する。K のみによって表された生産関数を解いて，生産規模1単位当たりの資本 K の要素需要関数 $k^i(r,w,1)$（式(3.1)）を求める(`Out[11]`)。

```
In[9]:= Solve[D[f, L] / D[f, K] == w / r, {L}]
   Solve::ifun : 逆関数がSolve
     により使用されているので，求められない解のある可能性があります.
```

$$\text{Out[9]= } \left\{\left\{L \to \left(-\frac{\text{delta}\, K^{\frac{1}{\text{sigma}}}\, r}{(-1+\text{delta})\, w}\right)^{\text{sigma}}\right\}\right\}$$

```
In[10]:= sol2 = Simplify[Solve[(Q / phi) ^ ((sigma - 1) / sigma) ==
       delta * (r * delta / (w * (1 - delta))) ^ (sigma - 1)
             * K ^ ((sigma - 1) / sigma)
        + (1 - delta) * K ^ ((sigma - 1) / sigma), K]]
   Solve::ifun : 逆関数がSolve
     により使用されているので，求められない解のある可能性があります.
```

$$\text{Out[10]= } \left\{\left\{K \to \left(-\frac{\left(\frac{Q}{\text{phi}}\right)^{\frac{-1+\text{sigma}}{\text{sigma}}} r}{(-1+\text{delta})\left(r + w\left(\frac{\text{delta}\, r}{w-\text{delta}\, w}\right)^{\text{sigma}}\right)}\right)^{\frac{\text{sigma}}{-1+\text{sigma}}}\right\}\right\}$$

```
In[11]:= sol$K = K /. sol2[[1]]
```

$$\text{Out[11]= } \left(-\frac{\left(\frac{Q}{\text{phi}}\right)^{\frac{-1+\text{sigma}}{\text{sigma}}} r}{(-1+\text{delta})\left(r + w\left(\frac{\text{delta}\, r}{w-\text{delta}\, w}\right)^{\text{sigma}}\right)}\right)^{\frac{\text{sigma}}{-1+\text{sigma}}}$$

さらに資本需要 K の関数として表した労働需要 L の式にこの結果を代入して労働 L の要素需要関数を求める。

```
In[12]:= sol$L = Simplify[(r * delta / (w * (1 - delta))) ^ sigma * K
       /. K -> %]
   General::spell1 :
    スペル間違いの可能性があります. 新規シンボル "sol$L"はすでにあるシンボル"
     sol$K"に似ています.
```

$$\text{Out[12]= } \left(\frac{\text{delta}\, r}{w - \text{delta}\, w}\right)^{\text{sigma}} \left(-\frac{\left(\frac{Q}{\text{phi}}\right)^{\frac{-1+\text{sigma}}{\text{sigma}}} r}{(-1+\text{delta})\left(r + w\left(\frac{\text{delta}\, r}{w-\text{delta}\, w}\right)^{\text{sigma}}\right)}\right)^{\frac{\text{sigma}}{-1+\text{sigma}}}$$

求める要素需要関数(4.4)は`Out[11]`と`Out[12]`によって与えられるので，ここで両企業（製造業と非製造業）の生産関数の規模係数 ϕ^i，資本ウエイト δ^i，代替の弾力性 σ^i に想定した値を代入する。

```
In[13]:= demand$L1 = sol$L /. {phi -> 1.5, delta -> 0.6, sigma -> 2, Q -> 1}
```

Out[13]= $\dfrac{9.375\,r^4}{\left(r+\frac{2.25\,r^2}{w}\right)^2 w^2}$

```
In[14]:= demand$K1 = sol$K /. {phi -> 1.5, delta -> 0.6, sigma -> 2, Q -> 1}
         General::spell1 :
          スペル間違いの可能性があります. 新規シンボル "demand$K1"
            はすでにあるシンボル "demand$L1" に似ています.
```

Out[14]= $\dfrac{4.16667\,r^2}{\left(r+\frac{2.25\,r^2}{w}\right)^2}$

Out[13] と Out[14] は第1企業（製造業）の労働と資本の要素需要関数である。

```
In[15]:= demand$L2 = sol$L /. {phi -> 2, delta -> 0.7, sigma -> 0.5, Q -> 1}
```

Out[15]= $\dfrac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}$

```
In[16]:= demand$K2 = sol$K /. {phi -> 2, delta -> 0.7, sigma -> 0.5, Q -> 1}
         General::spell1 :
          スペル間違いの可能性があります. 新規シンボル "demand$K2"
            はすでにあるシンボル "demand$L2" に似ています.
```

Out[16]= $\dfrac{0.15}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}$

同様に，Out[15] と Out[16] は第2企業（非製造業）の労働と資本の要素需要関数である。以上で，Shoven and Whalley の解き方（第3節）のステップ1の作業を終わる。

次の作業（ステップ2）は，利潤ゼロ条件 (2.7) を使い，第 i 財の価格 p^i を要素価格 r と w の関数 (3.2) として表すことである。

```
In[17]:= price$1 = w * demand$L1 + r * demand$K1
```

Out[17]= $\dfrac{4.16667\,r^3}{\left(r+\frac{2.25\,r^2}{w}\right)^2}+\dfrac{9.375\,r^4}{\left(r+\frac{2.25\,r^2}{w}\right)^2 w}$

```
In[18]:= price$2 = w * demand$L2 + r * demand$K2
```

Out[18]= $\dfrac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\dfrac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}$

続いて，ステップ3からステップ4の前半までの作業を行う。すなわち，財価格が与えられたときの両消費者の個人需要 (3.3) を集計して市場需要

を求め，これを満たす各財の産出量 (3.4) を求める。

```
In[19]:= Q$1 = p$demand$x1 + r$demand$x1 /. {p1 -> price$1, p2 -> price$2}
```

Out[19]=

$$(18.\,w) \Bigg/ \left(0.3 \left(\frac{4.16667\, r^3}{\left(r + \frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r + \frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}\right) + \right.$$

$$0.7 \left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}$$

$$\left.\left(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\right) +$$

$$(12.5\, r) \Bigg/ \left(0.5 \left(\frac{4.16667\, r^3}{\left(r + \frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r + \frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}\right) + \right.$$

$$0.5 \left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}$$

$$\left.\left(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\right)$$

```
In[20]:= Q$2 = p$demand$x2 + r$demand$x2 /. {p1 -> price$1, p2 -> price$2}
```

Out[20]=

$$\left(42.\,w \left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\right) \Bigg/$$

$$\left(0.3 \left(\frac{4.16667\, r^3}{\left(r + \frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r + \frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}\right) + \right.$$

$$0.7 \left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2} + \frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}$$

$$\left.\left(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}} + \frac{0.229129\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\, \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\right) +$$

$$
\left(12.5\, r \left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right) \Bigg/
$$

$$
\left(0.5 \left(\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}\right) + \right.
$$

$$
0.5 \left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{9.375\, r^4}{\left(r+\frac{2.25\, r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}
$$

$$
\left.\left(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\right)
$$

第1企業（製造業）の産出量は Out[19] により，第2企業（非製造業）のそれは Out[20] により与えられる。

In[21] から In[23] で行われているのは，ステップ4の後半とステップ5の作業である。先ず，第1企業（製造業）の労働需要（派生需要）L^1 を In[21] で L$1 として，第2企業（非製造業）のそれ L^2 を In[22] で L$2 として求める。

```
In[21]:= L$1 = demand$L1 * Q$1 /. w -> 1
```

Out[21]=

$$
\frac{1}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}
$$

$$
\left(9.375\, r^4 \left(18. \Bigg/ \left(0.3 \left(\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}+\frac{9.375\, r^4}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}\right) + \right.\right.\right.
$$

$$
0.7 \left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)
$$

$$
\left.\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}+\frac{9.375\, r^4}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\right)^{0.75}\right) +
$$

$$
(12.5\, r) \Bigg/ \left(0.5 \left(\frac{4.16667\, r^3}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}+\frac{9.375\, r^4}{\left(r+2.25\, r^2\right)^2}\right) + \right.
$$

$$
0.5 \left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)
$$

$$\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

```
In[22]:= L$2 = demand$L2 * Q$2 /. w -> 1
```

Out[22]=

$$\left(0.229129\, r^{0.5}\left(\left(\left(42.\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\right)\Bigg/\right.\right.\right.$$

$$\left(0.3\left(\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}\right)+0.7\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\right)+$$

$$\left(12.5\, r\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right)\Bigg/$$

$$\left(0.5\left(\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}\right)+\right.$$

$$0.5\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right)\right)\right)\Bigg/\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}$$

第 3 節で説明したように，ここでは解空間の次元を 2 次元（=要素空間の次元）まで削減して一般均衡体系を解くので，基本モデルの一般均衡は，資本市場，労働市場を同時にバランスさせるような要素価格 (r, w) の組み合わせとして与えられる。ここで Walras 法則によって，2 つの市場のうちどちらか一方がバランスしていれば，他方もバランスすることが保証されている。したがって，どちらか一方，例えば労働市場の集計的需要 L^1+L^2 が経済全体の労働賦存量（供給量）60 に等しくなるような要素価格 (r, w) の組み合わせを求めることが，均衡解を求めることになる。

このために，Mathematica の組み込み関数 `FindRoot` を使うことができる。ここに，組み込み関数 `FindRoot[`*expr*, $\{x, x_0\}$`]` は，Newton 法アルゴリズムに基づいて，点 $x=x_0$ を起点として非線形方程式 *expr* の数値解を求める関数である。

われわれの基本モデルに即していえば，$L^1+L^2=60$ となるような要素価格 $(r,\ w)$ の組み合わせを求めることになる。ただし，左辺の集計的需要 L^1+L^2 は要素価格 $(r,\ w)$ の非線形方程式である。なお，ここでは労働の要素価格（労働賃金率）w=1 という価格正規化を行っているので，次の In[23] の内容は w=1 という条件の下で労働の超過需要が 0 になる資本の要素価格（資本賃貸率）r を求めるという操作である。

```
In[23]:= FindRoot[L$1 + L$2 == 60, {r, 1}]
Out[23]= {r → 1.37347}
```

出力配列 Out[23] は，資本の均衡要素価格が r=1.37347 となることを示しており，これは Shoven and Whalley（1992，表 3.3）の結果と一致する。

以下の In[24] から In[26] では，労働市場ではなく資本市場に注目して一般均衡を求めている。すなわち，集計的資本需要 K^1+K^2 が経済全体の資本賦存量 25 に等しくなるような資本の要素価格（資本賃貸率）r を求める（ただし，w=1 という価格正規化は継続している）。当然のことながら，同じ r=1.37347 という結果 (Out[26]) を得る。

```
In[24]:= K$1 = demand$K1 * Q$1 /. w -> 1
```

Out[24]=

$$\frac{1}{(r+2.25\,r^2)^2}$$

$$\Bigg(4.16667\,r^2\,\Bigg(18.\Big/\Bigg(0.3\left(\frac{4.16667\,r^3}{(r+2.25\,r^2)^2}+\frac{9.375\,r^4}{(r+2.25\,r^2)^2}\right)+$$

$$0.7\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{4.16667\,r^3}{(r+2.25\,r^2)^2}+\frac{9.375\,r^4}{(r+2.25\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\Bigg)+$$

$$(12.5\,r)\Big/\Bigg(0.5\left(\frac{4.16667\,r^3}{(r+2.25\,r^2)^2}+\frac{9.375\,r^4}{(r+2.25\,r^2)^2}\right)+$$

$$0.5\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right)\right)\right)$$

```
In[25]:= K$2 = demand$K2 * Q$2 /. w -> 1
```

Out[25]=

$$\left(0.15\left(\left(42.\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\right)\Big/\right.\right.$$

$$\left(0.3\left(\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}\right)+0.7\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\right)+$$

$$\left(12.5\, r\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right)\Big/$$

$$\left(0.5\left(\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}\right)+\right.$$

$$0.5\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{\frac{4.16667\, r^3}{(r+2.25\, r^2)^2}+\frac{9.375\, r^4}{(r+2.25\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\right)^{1.5}\right)\right)\right)\Big/\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}$$

```
In[26]:= FindRoot[K$1 + K$2 == 25, {r, 1}]
Out[26]= {r → 1.37347}
```

6.　税モデルへの拡張と解き方

本節では，応用一般均衡分析を政策評価に利用することを考えて，2財2要素2消費者の基本モデルに税を組み入れて拡張すると同時に，解き方がどのように修正されるかを検討する[13]。第2節の2要素一般均衡モデルを拡張して，さまざまな税を組み込むことができるが，Shoven and Whalley（1992，第3.7節）は個別消費税，要素税，所得税を取り上げている。

個別消費税は，税引き価格を課税標準として財の消費に課税され，消費

13）　モデル拡張について，詳しくは Shoven and Whalley（1992，訳書 pp. 57-58）を参照。なお，このモデルはもともと Shoven and Whalley (1972) (1973) により定式化されたものである。

者（=財の需要者）が負担する税である。第 i 財の生産者価格を p_i，消費者価格を q_i，消費税率 τ_i をとすれば

$$q_i = (1+\tau_i)p_i \tag{6.1}$$

が成立する。

要素税は，生産要素の利用に対して課税され，企業（=生産者，要素の需要者）$(i=1,...,N)$ が負担する税である。労働利用に対する要素税では，賃金税率を τ_l [14] とすれば，企業の支払う労働の利用者価格は税込み賃金率 $(1+\tau_l)w$ となる。資本利用に対する要素税では，もし企業毎に異なる税率で課税され，その税率が τ_k^i ならば，第 i 企業の資本の利用者価格は税込み資本賃貸率 $(1+\tau_k^i)r$ となる。

所得税は，稼得所得を課税標準として課税され，消費者（=所得稼得者）が負担する税である。さまざまな形式の所得税が考えられるが，ここでは簡単化のために分析を線形税関数に限定する。所得税の限界税率を τ_y，実質人的控除を F [15] とすると，第 m 消費者の所得税額は

$$\tau_y(r\overline{K}^m + w\overline{L}^m - F) \tag{6.2}$$

と表される。ここに $\overline{K}^m$ と $\overline{L}^m$ は第 m 消費者の資本と労働の保有量（供給量）である。

これらの税からの政府税収 R は

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\tau_i\, p_i\, X_i^m + r\sum_{i=1}^{N}\tau_k^i K^i + \tau_l\, w\sum_{i=1}^{N}L^i \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N}\tau_y(r\overline{K}^m + w\overline{L}^m - F) \end{aligned} \tag{6.3}$$

と表される。右辺の第 1 項は個別消費税収，第 2 項と第 3 項はそれぞれ資

14） 税率は企業毎に違っても良い。
15） 簡単化のために，実質人的控除 F は全ての消費者に等しいと仮定する。

本と労働に対する要素税収，第 4 項は所得税収である。

政府は税収を消費者達に一括分配すると仮定して分析を簡単にしよう。移転総額（政府支出）を T と表すと，第 m 消費者の受取る移転 T^m は

$$T^m = \gamma^m T \tag{6.4}$$

によって与えられる。ここに γ^m は非負の定数で，$\sum_{m=1}^{M} \gamma^m = 1$ が成立する。

このような税の導入によって，解空間次元削減の手続き（第 3 節）の (3.1)-(3.6) は次のように修正される。

$$\frac{K^i}{Q^i} = k^i((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w, 1) \tag{3.1'}$$

$$\frac{L^i}{Q^i} = l^i((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w, 1)$$

$$\begin{aligned} p_i(r, w, T) = {} & (1+\tau_k^i)rk^i((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w, 1) \\ & + (1+\tau_l)wl^i((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w, 1) \end{aligned} \tag{3.2'}$$

$$\begin{aligned} X_i^m(r, w, T) = {} & X_i^m((1+\tau_1)p_1((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w), \ldots, \\ & (1+\tau_N)p_N((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w), r, w, \tau_y, F, T^m) \end{aligned} \tag{3.3'}$$

これらより，式 (3.4)-(3.5) は，各関数の説明変数を税引き価格ではなく税込み価格に置き換えれば，そのまま成立する。

モデルの実質的な変更点は，(3.6) への政府予算制約式の追加である。これは，一般均衡以外では税収（政府収入）R と移転（政府支出）T が常に一致するとは限らないという事実を表している。したがって，ステップ 5 には，生産要素の集計的超過需要関数に加えて，政府予算の超過需要関数が追加され，

$$\rho_k(r, w, T) = \sum_{i=1}^{N} K^i((1+\tau_k^i)r, (1+\tau_l)w) - \sum_{m=1}^{M} \overline{K}^m \tag{3.6'}$$

$$\rho_l(r,w,T)=\sum_{i=1}^{N}L^i((1+\tau_k^i)r,(1+\tau_l)w)-\sum_{m=1}^{M}\overline{L}^m$$

$$\rho_G(r,w,T)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\tau_i\,p_i\,X_i^m+r\sum_{i=1}^{N}\tau_k^iK^i+\tau_l\,w\sum_{i=1}^{N}L^i$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\tau_y\,(r\overline{K}^m+w\overline{L}^m-F)-\sum_{m=1}^{M}T^m$$

と書き換えられる。このとき，Walras 法則は

(6.5) $$r\rho_k(r,w,T)+w\rho_l(r,w,T)+\rho_G(r,w,T)\equiv 0$$

と表せるので，一般均衡は超過需要関数 ρ_k，ρ_l，ρ_G の値が同時にゼロになるような要素価格と移転総額の組み合わせ (r, w, T) として定義される。

以上がモデル拡張の紹介である。次に，均衡解を具体的に計算するために，必要なパラメーターの値を与えておこう。本稿では，数値例として Shoven and Whalley（1992，第 3 章第 7 節）のモデルを利用する[16)]。

個別消費税は第 1 財および第 2 財に 10% の税率 $(\tau_1=\tau_2=0.1)$ で課税され，要素税は第 1 企業（製造業）の資本に対してのみ 50% の税率 $(\tau_k^1=0.5)$ で課税されるとしよう。税収の消費者への移転は，富裕消費者 $m=R$ に対して移転総額の 40% $(\gamma^R=0.4)$，貧困消費者 $m=P$ に対して 60% $(\gamma^R=0.6)$ の割合で分配される。

これら以外のパラメーター，すなわち各消費者の効用関数の係数および初期保有，各企業の生産関数の係数には第 4 節と同一の数値を想定する。

7. Mathematica で税モデルを解く

本節では，Mathematica の notebook を見ながら，税モデルを解く様子を紹介する。最初に，需要関数を導出する。効用関数 (4.1) は基本モデル

16) 数値例については，Shoven and Whalley（1992，表 3.5，訳書 pp. 59-60）を参照。

と同じ CES 型が想定されるので，入力配列 In[1] は第５節と同じである。

```
In[1]:= u = (alpha1 ^ (1 / mu) * x1 ^ ((-1 + mu) / mu)
          + alpha2 ^ (1 / mu) * x2 ^ ((-1 + mu) / mu))
          ^ (mu / (mu - 1))
```

Out[1]= $\left(\text{alpha1}^{\frac{1}{\text{mu}}}\,\text{x1}^{\frac{-1+\text{mu}}{\text{mu}}}+\text{alpha2}^{\frac{1}{\text{mu}}}\,\text{x2}^{\frac{-1+\text{mu}}{\text{mu}}}\right)^{\frac{\text{mu}}{-1+\text{mu}}}$

しかし，税モデルでは個別消費税が導入され，消費者が支払う財価格は税込み価格 $q_i = (1+\tau_i)p_i$ に置き換えられる。すなわち，消費者が対峙する相対価格は基本モデルの $\frac{p_1}{p_2}$ ではなく $\frac{q_1}{q_2} = \frac{(1+\tau_1)p_1}{(1+\tau_2)p_2}$ に置き換えられる。このために，効用最大化問題 (2.2) の最適解の満たすべき限界代替率＝相対価格という１階の条件（必要条件）を，

$$\text{(7.1)} \qquad \text{MRS} = \frac{(1+\tau_1)p_1}{(1+\tau_2)p_2}$$

に置き換える必要がある。さらに，以下の入力（In[2]）において m は消費者の税引き所得（可処分所得）を意味しており，要素所得 $r\overline{K}^m + w\overline{L}^m$ とした第５節の m とは内容が異なる。

```
In[2]:= sol$d = Solve[
          {x2 == (p1 * (1 + 0.1) / (p2 * (1 + 0.1))) ^mu
                * alpha2 / alpha1 * x1,
           p1 * (1 + 0.1) * x1 + p2 * (1 + 0.1) * x2 == m}, {x1, x2}]
```

Out[2]= $\left\{\left\{\text{x1} \to \frac{0.909091\,\text{m}}{\text{p1}} + \frac{1.\left(0.\,\text{p1} - \frac{1.\,1.^{1+\text{mu}}\,\text{alpha2}\,\text{m}\,\left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}}{\text{alpha1}}\right)\text{p2}}{\text{p1}\left(1.1\,\text{p1} + \frac{1.1\,1.^{\text{mu}}\,\text{alpha2}\,\left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}\,\text{p2}}{\text{alpha1}}\right)},\right.\right.$

$\left.\left.\text{x2} \to -\frac{1.\left(0.\,\text{p1} - \frac{1.\,1.^{1+\text{mu}}\,\text{alpha2}\,\text{m}\,\left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}}{\text{alpha1}}\right)}{1.1\,\text{p1} + \frac{1.1\,1.^{\text{mu}}\,\text{alpha2}\,\left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{\text{mu}}\,\text{p2}}{\text{alpha1}}}\right\}\right\}$

需要関数は Out[2] で導出されるので，効用関数のパラメーターおよび初期保有について，想定した数値を代入する。

```
In[3]:= p$demand$x1 = x1 /. sol$d[[1]] /.
          {m -> 60 * w + 0.6 * R, mu -> 0.75,
           alpha1 -> 0.3, alpha2 -> 0.7}
```

Out[3]= $\frac{0.909091\,(0.6\,\text{R}+60\,\text{w})}{\text{p1}} + \frac{1.\,\text{p2}\left(0.\,\text{p1} - 2.33333\,\left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{0.75}(0.6\,\text{R}+60\,\text{w})\right)}{\text{p1}\left(1.1\,\text{p1} + 2.56667\,\left(\frac{\text{p1}}{\text{p2}}\right)^{0.75}\text{p2}\right)}$

```
In[4]:= p$demand$x2 = x2 /. sol$d[[1]] /.
          {m -> 60 * w + 0.6 * R, mu -> 0.75,
```

```
alpha1 -> 0.3, alpha2 -> 0.7}
```

Out[4]= $-\dfrac{1.\ \left(0.\ \mathrm{p1}-2.33333\ \left(\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}\right)^{0.75}\ (0.6\ \mathrm{R}+60\ \mathrm{w})\right)}{1.1\ \mathrm{p1}+2.56667\ \left(\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}\right)^{0.75}\ \mathrm{p2}}$

```
In[5]:= r$demand$x1 = x1 /. sol$d[[1]] /.
            {m -> 25 * r + 0.4 * R, mu -> 1.5,
             alpha1 -> 0.5, alpha2 -> 0.5}
General::spell1 :
 スペル間違いの可能性があります．新規シンボル "r$demand$x1" はすでにあるシンボル "
   p$demand$x1" に似ています．
```

Out[5]= $\dfrac{1.\ \mathrm{p2}\ \left(0.\ \mathrm{p1}-1.\ \left(\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}\right)^{1.5}\ (25\ \mathrm{r}+0.4\ \mathrm{R})\right)}{\mathrm{p1}\ \left(1.1\ \mathrm{p1}+1.1\ \left(\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}\right)^{1.5}\ \mathrm{p2}\right)}+\dfrac{0.909091\ (25\ \mathrm{r}+0.4\ \mathrm{R})}{\mathrm{p1}}$

```
In[6]:= r$demand$x2 = x2 /. sol$d[[1]] /.
            {m -> 25 * r + 0.4 * R, mu -> 1.5,
             alpha1 -> 0.5, alpha2 -> 0.5}
General::spell1 :
 スペル間違いの可能性があります．新規シンボル "r$demand$x2" はすでにあるシンボル "
   p$demand$x2" に似ています．
```

Out[6]= $-\dfrac{1.\ \left(0.\ \mathrm{p1}-1.\ \left(\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}\right)^{1.5}\ (25\ \mathrm{r}+0.4\ \mathrm{R})\right)}{1.1\ \mathrm{p1}+1.1\ \left(\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{p2}}\right)^{1.5}\ \mathrm{p2}}$

Out[3] と Out[4] は貧困消費者 m=P の，Out[5] と Out[6] は裕福消費者 m=R の製造業品 i=1 と非製造業品 i=2 の需要関数である。

生産側の定式化に進み，生産関数から要素需要関数を導出する。最初に，生産関数 (4.3) を入力する。これは，基本モデルと同一である。

```
In[7]:= f =
      phi * (delta * L ^ ((sigma - 1) / sigma)
          + (1 - delta) * K ^ ((sigma - 1) / sigma))
        ^ (sigma / (sigma - 1))
```

Out[7]= $\left((1-\mathrm{delta})\ \mathrm{K}^{\frac{-1+\mathrm{sigma}}{\mathrm{sigma}}}+\mathrm{delta}\ \mathrm{L}^{\frac{-1+\mathrm{sigma}}{\mathrm{sigma}}}\right)^{\frac{\mathrm{sigma}}{-1+\mathrm{sigma}}}\ \mathrm{phi}$

要素需要関数を費用最小化条件を使って導出しようとすると，ここでも超越関数であることが問題となるので，まず限界代替率＝要素価格比から労働需要 L を資本需要 K の関数として解く。ただし，要素税の導入により，第 i 企業（要素需要者）(i=1, 2) の支払う要素価格は税込み価格 $(1+\tau_k^i)r$，$(1+\tau_l)w$ になっているので，ここでは要素価格比を第5節の $\frac{r}{w}$ から $\frac{(1+\tau_k^i)r}{(1+\tau_l)w}$ に置き換える必要がある。

企業により要素税率が異なるので，まず第1企業（製造業）について作業を進める。

```
In[8]:= sol2$1 = Solve[(Q / phi) ^ ((sigma - 1) / sigma)
          == delta * (r * (1 + 0.5) * delta
                / (w * (1 - delta))) ^ (sigma - 1)
           * K ^ ((sigma - 1) / sigma)
          + (1 - delta) * K ^ ((sigma - 1) / sigma),
          K]

        Solve::ifun :
         逆関数がSolveにより使用されているので，求められない解のある可能性があります．
```

Out[8]= $\{\{K \to 1.\ 3.^{\frac{sigma}{-1+sigma}} \left(\left(Q\left(\frac{Q}{phi}\right)^{-1/sigma} r\right) \Big/ \left((1. - 1.\ delta)\ phi \left(3.\ r + 2.\ 1.5^{sigma} \left(\frac{delta\ r}{(1. - 1.\ delta)\ w}\right)^{sigma} w\right)\right)\right) ^\wedge \left(\frac{sigma}{-1 + sigma}\right)\}\}$

これを生産関数に代入して生産関数を K のみ関数として表してから，生産規模1単位当たりの資本 K の要素需要関数 $k^1(r, w, 1)$ を求める（In[9]）。さらに労働需要 L の式に Out[9]の結果を代入して労働 L の要素需要関数 $l^1(r, w, 1)$ を求める（In[10]）。

```
In[9]:= sol$K$1 = K /. sol2$1[[1]]
```

Out[9]= $1.\ 3.^{\frac{sigma}{-1+sigma}} \left(\left(Q\left(\frac{Q}{phi}\right)^{-1/sigma} r\right) \Big/ \left((1. - 1.\ delta)\ phi \left(3.\ r + 2.\ 1.5^{sigma} \left(\frac{delta\ r}{(1. - 1.\ delta)\ w}\right)^{sigma} w\right)\right)\right) ^\wedge \left(\frac{sigma}{-1 + sigma}\right)$

```
In[10]:= sol$L$1 = (r * (1 + 0.5) * delta
           / (w * (1 - delta))) ^ sigma * K
           /. K -> %

         General::spell1 :
          スペル間違いの可能性があります．新規シンボル"sol$L$1"はすでにあるシンボル"sol$K$1"
           に似ています．
```

Out[10]= $1.\ 1.5^{sigma}\ 3.^{\frac{sigma}{-1+sigma}} \left(\frac{delta\ r}{(1 - delta)\ w}\right)^{sigma} \left(\left(Q\left(\frac{Q}{phi}\right)^{-1/sigma} r\right) \Big/ \left((1. - 1.\ delta)\ phi \left(3.\ r + 2.\ 1.5^{sigma} \left(\frac{delta\ r}{(1. - 1.\ delta)\ w}\right)^{sigma} w\right)\right)\right) ^\wedge \left(\frac{sigma}{-1 + sigma}\right)$

同様に，第2企業（非製造業）の要素需要関数を求める。

```
In[11]:= sol2$2 = Solve[(Q / phi) ^ ((sigma - 1) / sigma)
           == delta * (r * delta
                 / (w * (1 - delta))) ^ (sigma - 1)
            * K ^ ((sigma - 1) / sigma)
           + (1 - delta) * K ^ ((sigma - 1) / sigma),
          K]
```

```
Solve::ifun :
 逆関数がSolveにより使用されているので，求められない解のある可能性があります．
```

Out[11]=
$$\left\{\left\{K\to\left(-\frac{Q\,\left(\frac{Q}{\mathrm{phi}}\right)^{-1/\mathrm{sigma}}\,r}{(-1+\mathrm{delta})\,\mathrm{phi}\,\left(r+\left(\frac{\mathrm{delta}\,r}{(1-\mathrm{delta})\,w}\right)^{\mathrm{sigma}}\,w\right)}\right)^{\wedge}\left(\frac{\mathrm{sigma}}{-1+\mathrm{sigma}}\right)\right\}\right\}$$

In[12]:=
```
sol$K$2 = K /. sol2$2[[1]]
```

Out[12]=
$$\left(-\frac{Q\,\left(\frac{Q}{\mathrm{phi}}\right)^{-1/\mathrm{sigma}}\,r}{(-1+\mathrm{delta})\,\mathrm{phi}\,\left(r+\left(\frac{\mathrm{delta}\,r}{(1-\mathrm{delta})\,w}\right)^{\mathrm{sigma}}\,w\right)}\right)^{\frac{\mathrm{sigma}}{-1+\mathrm{sigma}}}$$

In[13]:=
```
sol$L$2 = (r * delta / (w * (1 - delta)))
    ^ sigma * K
    /. K -> %
```

```
General::spell1 :
 スペル間違いの可能性があります．新規シンボル"sol$L$2"はすでにあるシンボル"sol$K$2"
  に似ています．
```

Out[13]=
$$\left(\frac{\mathrm{delta}\,r}{(1-\mathrm{delta})\,w}\right)^{\mathrm{sigma}}\left(-\frac{Q\,\left(\frac{Q}{\mathrm{phi}}\right)^{-1/\mathrm{sigma}}\,r}{(-1+\mathrm{delta})\,\mathrm{phi}\,\left(r+\left(\frac{\mathrm{delta}\,r}{(1-\mathrm{delta})\,w}\right)^{\mathrm{sigma}}\,w\right)}\right)^{\frac{\mathrm{sigma}}{-1+\mathrm{sigma}}}$$

ここで，パラメーターの想定値（生産関数の規模係数 ϕ^i，資本ウエイト δ^i，代替の弾力性 σ^i）を代入して，両企業（製造業と非製造業）の要素需要関数を完成させれば，解き方のステップ 1 は終了する。

In[14]:=
```
demand$L1 = sol$L$1
    /. {phi -> 1.5, delta -> 0.6,
       sigma -> 2, Q -> 1}
```

Out[14]=
$$\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2\,w^2}$$

In[15]:=
```
demand$K1 = sol$K$1
    /. {phi -> 1.5, delta -> 0.6,
       sigma -> 2, Q -> 1}
```

```
General::spell1 :
 スペル間違いの可能性があります．新規シンボル"demand$K1"はすでにあるシンボル"
  demand$L1"に似ています．
```

Out[15]=
$$\frac{37.5\,r^2}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}$$

In[16]:=
```
demand$L2 = sol$L$2
    /. {phi -> 2, delta -> 0.7,
       sigma -> 0.5, Q -> 1}
```

Out[16]=
$$\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}\,w}\right)^{1.}}$$

In[17]:=
```
demand$K2 = sol$K$2
    /. {phi -> 2, delta -> 0.7,
```

```
sigma -> 0.5, Q -> 1}
General::spell1 :
 スペル間違いの可能性があります. 新規シンボル "demand$K2"はすでにあるシンボル"
   demand$L2"に似ています.
```

Out[17]=
$$\frac{0.15}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}\,w}\right)^{1.}}$$

続いて，利潤ゼロ条件を使い，第 i 財の価格 p_i を要素価格 r と w の関数 (3.2) として表す（解き方のステップ 2)。

```
In[18]:= price$1 = w * demand$L1
              + r * (1 + 0.5) * demand$K1
```

Out[18]=
$$\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2\,w}$$

```
In[19]:= price$2 = w * demand$L2 + r * demand$K2
```

Out[19]=
$$\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}\,w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}\,w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}\,w}\right)^{1.}}$$

この財価格 p_i が与えられたときの両消費者の個人需要 (3.3) を集計して市場需要を求め，これを満たす各財の生産量 (3.4) を求める（ステップ 3 からステップ 4 の前半まで)。第 1 企業（製造業）の生産量は Out[20] により，第 2 企業（非製造業）のそれは Out[21] により与えられる。

```
In[20]:= Q$1 = p$demand$x1 + r$demand$x1
            /. {p1 -> price$1, p2 -> price$2}
```

Out[20]=
$$\frac{0.909091\,(25\,r+0.4\,R)}{\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}}+\frac{0.909091\,(0.6\,R+60\,w)}{\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}}+$$
$$\left(1.\left(\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}w}\right)^{1.}}\right)\right.$$
$$\left(0.\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)-\right.$$
$$2.33333\,(0.6\,R+60\,w)\left(\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)\Big/\right.$$
$$\left.\left.\left.\left(\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}w}\right)^{1.}}\right)\right)\hat{}\,0.75\right)\right)\Big/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\,\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)+$$

$$2.56667\,\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg)\,\texttt{\^{}0.75}$$

$$\Bigg(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)+$$

$$\Bigg(1.\,\Bigg(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\Bigg)$$

$$\Bigg(0.\,\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)-$$

$$1.\,(25\, r+0.4\, R)\,\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg)\,\texttt{\^{}1.5}\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\,\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)+$$

$$1.1\,\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\, r^4}{\left(3.\, r+\frac{10.125\, r^2}{w}\right)^2 w}\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg)\,\texttt{\^{}1.5}$$

$$\Bigg(\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\,\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

```
In[21]:= Q$2 = p$demand$x2 + r$demand$x2
          /. {p1 -> price$1, p2 -> price$2}
```

Out[21]=

$$
\begin{aligned}
&-\Bigg(1.\,\Bigg(0.\,\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)-\\
&\qquad 2.33333\,(0.6\,R+60\,w)\,\Bigg(\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)\Big/\\
&\qquad\quad \left(\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\Bigg)\,\hat{}\,0.75\Bigg)\Bigg)\Big/\\
&\quad\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)+\\
&\qquad 2.56667\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)\hat{}\,0.75\\
&\qquad \left(\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\Bigg)-\\
&\quad\Bigg(1.\,\Bigg(0.\,\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)-\\
&\qquad 1.\,(25\,r+0.4\,R)\,\Bigg(\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)\Big/\\
&\qquad\quad \left(\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\Bigg)\,\hat{}\,1.5\Bigg)\Bigg)\Big/\\
&\quad\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}\right)+\\
&\qquad 1.1\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2}+\frac{189.844\,r^4}{\left(3.\,r+\frac{10.125\,r^2}{w}\right)^2 w}}{\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}}\right)\hat{}\,1.5\\
&\qquad \left(\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}+\frac{0.229129\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}{\left(\frac{r}{r+1.52753\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5} w}\right)^{1.}}\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

次に，ステップ４の後半からステップ５の作業へ進む。先ず，両企業の労働需要（派生需要）L^1 と L^2 を In[22] と In[23] で求める。税モデルでは，(3.6') の政府予算の超過需要関数が追加されるので，これを net$revenue として求める（In[24]）。

```
In[22]:= L$1 = demand$L1 * Q$1 /. w -> 1
```

Out[22]=

$$\Bigg(189.844\, r^4 \Bigg(\Bigg(\Bigg(1.\, \Bigg(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\Bigg)$$

$$\Bigg(0.\, \Bigg(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\Bigg) -$$

$$1.\, \Bigg(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\Bigg)\text{^}1.5\ (25\, r + 0.4\, R)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\, \Bigg(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\Bigg) + 1.1\, \Bigg(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}} +$$

$$\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\Bigg)\text{^}1.5\Bigg)\Bigg) +$$

$$\Bigg(1.\, \Bigg(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\Bigg)$$

$$\Bigg(0.\, \Bigg(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\Bigg) -$$

$$2.33333\, \Bigg(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\Bigg)\text{^}0.75\ (60 + 0.6\, R)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\, \Bigg(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\Bigg) +$$

$$2.56667\, \Bigg(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\Bigg)$$

$$\Bigg(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}} + \frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\Bigg)\text{^}0.75\Bigg)\Bigg) +$$

$$\frac{0.909091\ (25\, r + 0.4\, R)}{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}} + \frac{0.909091\ (60 + 0.6\, R)}{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2} + \frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$(3.\, r+10.125\, r^2)^2$$

In[23]:= `L$2 = demand$L2 * Q$2 /. w -> 1`

Out[23]=

$$\left(0.229129\, r^{0.5}\left(-\left(1.\left(0.\left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.1.\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}(25\, r+0.4\, R)\right)\right)\right)\Big/$$

$$\left(1.1\left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)+1.1\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right)-$$

$$\left(1.\left(0.\left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.2.33333\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}(60+0.6\, R)\right)\right)\Big/$$

$$\left(1.1\left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)+\right.$$

$$2.56667\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\right)\right)\right)\Big/\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}$$

In[24]:= `net$revenue =`
`0.1 * price$1 * Q$1 + 0.1 * price$2 * Q$2 + 0.5 * r * demand$K1 * Q$1 - R /. w -> 1`

Out[24]=

$$0.1\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(-\left(1.\left(0.\left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.1.\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}(25\, r+0.4\, R)\right)\right)\Big/$$

$$\left(1.1\left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)+1.1\left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\right)-$$

$$\Bigg(1.\ \Bigg(0.\ \left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-$$

$$2.33333\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}(60+0.6\,R)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)+$$

$$2.56667\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\Bigg)\Bigg)+$$

$$\Bigg(18.75\,r^3\ \Bigg(\Bigg(1.\ \left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\Bigg(0.\ \left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-$$

$$1.\ \left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\right)\text{\textasciicircum}1.5\ (25\,r+0.4\,R)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\Bigg(\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)\Bigg(1.1\ \Bigg(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+$$

$$\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\Bigg)+1.1\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)\text{\textasciicircum}1.5\Bigg)\Bigg)+\Bigg(1.\ \Bigg(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+$$

$$\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\Bigg)\Bigg(0.\ \left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-$$

$$2.33333\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\right)\text{\textasciicircum}0.75\ (60+0.6\,R)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)+$$

$$2.56667\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1}}}\right)\text{\textasciicircum}0.75\Bigg)\Bigg)+$$

$$\frac{0.909091\ (25\ r+0.4\ R)}{\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}}+\frac{0.909091\ (60+0.6\ R)}{\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}}\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$(3.\ r+10.125\ r^2)^2+$$

$$0.1$$

$$\left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\right.$$

$$\left.\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)$$

$$\Bigg(\Bigg(\Bigg(1.\ \left(\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\Bigg(0.\ \left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)-$$

$$1.\ \left(\frac{\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}}{\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\ (25\ r+0.4\ R)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)$$

$$\Bigg(1.1\ \left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)+1.1\ \left(\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\right.$$

$$\left.\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}}{\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{1.5}\Bigg)\Bigg)+$$

$$\Bigg(1.\ \left(\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\Bigg(0.\ \left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)-$$

$$2.33333\ \left(\frac{\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}}{\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\ (60+0.6\ R)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)$$

$$\Bigg(1.1\ \left(\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}\right)+$$

$$2.56667\ \left(\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{56.25\ r^3}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}+\frac{189.844\ r^4}{(3.\ r+10.125\ r^2)^2}}{\frac{0.229129\ r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\ r}{\left(\frac{r}{1.52753\ r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\Bigg)\Bigg)+$$

$$\left.\frac{0.909091\ (25\,r+0.4\,R)}{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}+\frac{0.909091\ (60+0.6\,R)}{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}\right)-R$$

第5節でも強調したように，われわれはこの一般均衡体系を解空間の次元を削減して解いているので，税モデルの一般均衡は，資本と労働の超過需要，政府予算の超過需要を同時にゼロするような要素価格 (r, w) と移転総額 T の組み合わせとして与えられる。ここで，Walras 法則を使うと，3つの市場のうち任意の1つを落とすことができる。つまり，例えば資本市場を落とし，残る労働市場と政府の予算制約に注目して，労働の集計的需要 L^1+L^2 が経済全体の労働賦存量 60 に等しくなり，政府予算の超過需要がゼロになるような組み合わせ (r, w, T) を求めることが，税モデルの均衡解を求めることになる。

```
In[25]:= FindRoot[{L$1 + L$2 == 60, net$revenue == 0}, {r, 1}, {R, 5}]
Out[25]= {r → 1.12623, R → 11.3285}
```

`Out[25]`は，w=1 という価格正規化の下で，資本の均衡要素価格が `r=1.12623`，均衡税収が `T=11.3285` となることを示しており，この結果は Shoven and Whalley (1992，表3.7) と一致する。

以下の `In[26]`から `In[28]`は，労働市場を落として，資本と政府予算の超過需要の条件から一般均衡を計算する手続きである。すなわち，集計的資本需要 K^1+K^2 が経済全体の資本賦存量 25 に等しくなり，政府予算の超過需要がゼロになるような資本の要素価格（資本賃貸率）r と移転総額 T の組み合わせを求めている。

```
In[26]:= K$1 = demand$K1 * Q$1 /. w -> 1
```

Out[26]=

$$\left(37.5\,r^2\left(\left(1.\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left(0.\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.1.\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\,r}{\left(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)\text{^}1.5\ (25\,r+0.4\,R)\right)\right)\Big/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)+1.1\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\right.$$

$$\left.\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}}\right)\text{^}1.5\Bigg)\Bigg)+$$

$$\Bigg(1.\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}\right)$$

$$\Bigg(0.\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-$$

$$2.33333\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}}\right)\text{^}0.75\ (60+0.6\,R)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(\Bigg(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\Bigg)$$

$$\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)+$$

$$2.56667\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}}\right)\text{^}0.75\Bigg)\Bigg)+$$

$$\frac{0.909091\ (25\,r+0.4\,R)}{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}+\frac{0.909091\ (60+0.6\,R)}{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$(3.\,r+10.125\,r^2)^2$$

```
In[27]:= K$2 = demand$K2 * Q$2 /. w -> 1
```

Out[27]=

$$\Bigg(0.15\Bigg(-\Bigg(1.\Bigg(0.\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-$$

$$1.\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}}\right)\text{^}1.5\ (25\,r+0.4\,R)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(1.1\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)+1.1\left(\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\right.$$

$$\left.\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}\right)\left(\frac{\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}}{\frac{0.229129\,r^{0.5}}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}+\frac{0.15\,r}{(\frac{r}{1.52753\,r^{0.5}+r})^{1.}}}\right)^{1.5}\Bigg)-$$

$$\Bigg(1.\Bigg(0.\left(\frac{56.25\,r^3}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}+\frac{189.844\,r^4}{(3.\,r+10.125\,r^2)^2}\right)-$$

$$2.33333 \left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right) \hat{}\, 0.75\ (60+0.6\, R)\Bigg)\Bigg) \Big/$$

$$\Bigg(1.1 \left(\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}\right)+$$

$$2.56667 \left(\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{56.25\, r^3}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}+\frac{189.844\, r^4}{(3.\, r+10.125\, r^2)^2}}{\frac{0.229129\, r^{0.5}}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}+\frac{0.15\, r}{\left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}}}\right)^{0.75}\Bigg)\Bigg)\Bigg) \Big/ \left(\frac{r}{1.52753\, r^{0.5}+r}\right)^{1.}$$

```
In[28]:= FindRoot[{K$1 + K$2 == 25, net$revenue == 0}, {r, 1}, {R, 120}]
Out[28]= {r → 1.12623, R → 11.3285}
```

当然のことながら，r=1.37347 と T=11.3285 という同じ結果を得る。

8. MPSGE で解く

いま Mathematica で解いたのと同じ数値例を，Rutherford (1989) により開発された応用一般均衡分析のための専用ソフトウェア MPSGE で解いてみよう。はじめにでも紹介したように，MPSGE は現在，解法プログラムの１つとしてとして数理計画法解法パッケージ GAMS に組み込まれており，GAMS/MPSGE として利用可能である。ここでの処理の流れは，GAMS を起動すると，MPSGE が GAMS のプリプロセッサー preprocessor[17] として前処理を行い，GAMS 本体が処理可能な形でデータを渡し，GAMS が他の解法プログラムを使いながら計算を行い，結果を出力するという流れになる。このために，MPSGE の使い方に加えて GAMS の使い方[18] も知る必要があり，多少利用が厄介である。しかし，MPSGE の入力ファイル（表参照）を見れば分かるように，Mathematica で解く場合

17) データの編成や予備計算などの前処理をするためのコンピュータプロクラム（小学館『ランダムハウス英和辞典』）。

18) GAMS を利用して応用一般均衡分析を行う方法については，小平 (2002a) (2002c) (2002d) (2003a) (2003b) においてモデルを段階的に拡張して検討した。

に比べれば，はるかに簡単であることが分かろう。これは，専用ソフトウェアの優位点である。

MPSGE の使い方については稿を改めて検討することにして，ここでは簡単に表の入力ファイルを見ておこう。ただし，左側の数字は，参照の便宜のために付けた行番号であり，MPSGE への入力には関係ない。

第 1 に，MPSGE への入力部分は，`$ONTEXT` と `$OFFTEXT` で囲む必要がある。表の入力ファイルに即していえば，7 行の `$ONTEXT` から 47 行の `$OFFTEXT` までの部分が MPSGE モデルであり，GAMS 本体からは注釈行と見なされている。49 行の `$SYSINCLUDE` で，MPSGE に対してモデル関数をコンパイルするよう指示を行い，MPSGE 関数が GAMS に見えるようにする。そして，56-57 行において GAMS に処理が移り計算が行われる。ここでは，MILES という別の解法プログラム（プリプロセッサー）が使われている。なお，51 行は労働の要素価格（賃金率）w を 1 とおく価格正規化である。

次に，MPSGE によるモデルの表し方を見よう。ここで取り上げている Shoven and Whalley の基本モデルと税モデルは何れも 2 財 2 要素 2 消費者モデルであるので，消費者については 11-13 行の `$CONSUMERS` で富裕消費者 `rich` と貧困消費者 `poor` を，商品についてはその価格を 15-19 行の`$COMMODITIES` において定義する。すなわち，製造業品 `mfrs` の価格 pm，非製造業品 `nmfrs` の価格 pn の 2 種類の財価格と，資本賃貸率 `r`，労働賃金率 `w` の 2 種類の要素価格，合計 4 種類の価格を定義する。最後に，21-23 行で生産部門 `$SECTORS` を定義する。変数定義では，！以下に注釈を付けることができる。

消費者については，`$DEMAND` レコードで需要関係を定義する。`E:`フィールドは初期保有（賦存量）の価格と数量を表している。例えば，富裕消費者 `rich` の初期保有は資本 $\overline{K}^R=25$，労働 $\overline{L}^R=0$ とされたので，28-29 行のようになる。効用関数は CES 型と想定され，代替の弾力性が `s:`

表　MPSGEの入力ファイル

```
$TITLE Shoven and Whalley Model

SCALAR  tc     consumption tax rate                /0/,
        tkm    capital tax rate on mfrs sector     /0/,
        dr     rich's share on tax revenue       /0.4/;

$ONTEXT

$MODEL:SW

$CONSUMERS:
     rich        ! income level for consumer rich
     poor        ! income level for consumer poor

$COMMODITIES:
     pm          ! commodity price of mfrs
     pn          ! commodity price of nmfrs
     r           ! rental rate (factor price of K)
     w           ! wage rate (factor price of L)

$SECTORS:
     mfrs        ! output level for mfrs sector
     nmfrs       ! output level for nmfrs sector

$DEMAND:rich    s:1.5
   D:pm  Q:0.5   A:rich T:(dr*tc)    A:poor T:((1-dr)*tc)
   D:pn  Q:0.5   A:rich T:(dr*tc)    A:poor T:((1-dr)*tc)
   E:r   Q:25
   E:w   Q:0

$DEMAND:poor     s:0.75
   D:pm  Q:0.3   A:rich T:(dr*tc)    A:poor T:((1-dr)*tc)
   D:pn  Q:0.7   A:rich T:(dr*tc)    A:poor T:((1-dr)*tc)
   E:r   Q:0
   E:w   Q:60

$PROD:mfrs     s:2.0
   O:pm  Q:1
   I:r   Q:0.4   A:rich T:(dr*tkm)  A:poor T:((1-dr)*tkm)
```

```
40     I:w    Q:0.6
41
42  $PROD:nmfrs     s:0.5
43     O:pn   Q:1
44     I:r    Q:0.3
45     I:w    Q:0.7
46
47  $OFFTEXT
48
49  $SYSINCLUDE mpsgeset SW
50
51       w.FX = 1;
52       SW.ITERLIM = 0;
53
54  * Solve a basic model
55
56  $INCLUDE SW.GEN
57       SOLVE SW USING MCP;
58       SW.ITERLIM = 2000;
59
60  * Solve a tax model
61
62     tkm = 0.5;
63     tc = 0.1;
64
65  $INCLUDE SW.GEN;
66       SOLVE SW USING MCP;
```

フィールドに，その加重は D:フィールドの Q:に記載される。D:フィールドの A:と T:は課税される場合の税収を受け取る経済主体と税率である。Shoven and Whalley の税モデルでは，税収は富裕消費者 rich に 40%，貧困消費者 poor に 60% の割合で還付されると想定しているので，26-27 行のように表し，dr=0.4 と置けばよい。

生産側については，$PROD で生産関数を定義する。生産関数も CES 型と想定されている。I:レコードは投入，O:フィールドは産出に係わる。それぞれの意味は$DEMAND からの類推で明らかであるから，これ以上の説明は不要であろう。

Shoven and Whalley の税モデルでは，消費税と製造業部門の資本利用に対する要素税を取り上げているが，一般均衡体系の構造は基本モデルと同じである。そこでここでは，税モデルについての入力ファイルを作成した上で，基本モデルについてはそれぞれの税率を 0 とおいて解いている。つまり，基本モデルと税モデルの入力ファイルを別々に作成する必要はない。その様子は，3-4 行において消費税率 `tc` と要素税率 `tkm` の変数を定義したときに，これらに 0 という値を代入していることから分かる。したがって，モデルの定式化を終えて 56-57 行で解いているのは，基本モデルである。その後，62-63 行で要素税の税率に 50% (`tkm=0.5`)，消費税の税率に 10% という値 (`tc=0.1`) を代入して，65-66 行で税モデルを解いている。

当然のことながら，Mathematica で解いたのと同じ結果を得る。

9. むすび

われわれは，Shoven and Whalley (1992) の第 3 章の 2 要素モデルの数値例（第 3 節と第 7 節）の一般均衡解を Mathematica と MPSGE を使って実際に求めてみた。汎用の数式処理ソフトウェア Mathematica よる解法では，解空間の次元を生産要素の数まで（ここでは 2 次元まで）引き下げて解くという Shoven and Whalley の方針に忠実に従って解くことを試みた。Shoven and Whalley は財価格と要素価格の全てを求めるよりは，要素価格だけを求める方が計算量が少ないという理由で，この解空間次元削減の解法を薦めているが，基本モデルと税モデルでは，数学的構造は同じであるにも関わらず，均衡解を定義する超過需要関数の数が違うために（(3.6) と (3.6') を比較せよ），別々に入力ファイルを作成して均衡解を求める必要があり，Mathematica による計算手続きは複雑になった。

一方，応用一般均衡分析のための専用ソフトウェア MPSGE は，効用関数，生産関数の関数形に CES 型を想定しており，その意味では適用範

囲は関数形が CES 型，Cobb-Douglas 型，Leontief 型の 3 通りの場合に限られるが，これらの場合には代替の弾力性と加重のパラメーターを与えるだけで，MPSGE が需要関数と供給関数を導出して超過需要を計算するので，解空間次元削減の手法をとらなくても，与えられた一般均衡体系の均衡解を Mathematica によるよりもずっと容易に計算することができる。さらに，第 8 節の入力ファイルでもそうしたように，税率などの外生的パラメーターの値を順次変えて繰り返し計算することも容易にでき，政策シミュレーションには有利である。

固有要素，中間投入，結合生産，労働供給，税制，不完全競争，国際貿易などを含むモデルについて，MPSGE の使い方を検討することは今後の課題としたい。

参　照　文　献

Brooke, A., Kendrick, D., and Meeraus, A., (1988), *GAMS: A User's Guide Release 2.25*, Boyd and Fraser.

小平裕 (1992)「一般均衡モデルの構造と解法アルゴリズム」『経済研究』第 114 号，1992 年 10 月。

小平裕 (2002a)「GAMS による応用一般均衡分析：基本モデル」,『経済研究』第 156 号，2002 年 3 月。

小平裕 (2002b)「Mathematica によるミクロ経済学」，成城大学経済研究所研究報告 No. 34，2002 年 4 月。

小平裕 (2002c)「GAMS による応用一般均衡分析：中間投入のあるモデル」『経済研究』第 157 号，2002 年 6 月

小平裕 (2002d)「GAMS による応用一般均衡分析：資本市場と企業固有の生産要素」,『経済研究』第 158 号，2002 年 11 月

小平裕 (2003a)「GAMS による応用一般均衡分析：政府活動と失業」,『経済研究』第 159 号，2003 年 1 月

小平裕 (2003b)「GAMS による応用一般均衡分析：海外部門のあるモデル」,『経済研究』第 160 号，2003 年 3 月

Mathiesen, L., (1987), "An Algorithm based on a Sequence of Linear Complementarity Problems Applied to Walrasian Equilibrium: An Example," *Mathemati-*

cal Programming vol. 37, pp. 1-18.

Scarf, H. E., (1967), "The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping," *SIAM Journal on Applied Mathematics* vol. 15 (5), pp. 1328-1348.

Shoven, J. B., and Whalley, J., (1972), "A General Equilibrium Calculation of the Effects of Differential Taxation of Income from Capital in the U. S.," *Journal of Public Economics* vol. 1, pp. 281-322.

Shoven, J. B., and Whalley, J., (1973), "General Equilibrium with Taxes: A Computation Procedure and an Existence Proof," *Review of Economic Studies* vol. 40, pp. 475-490.

Shoven, J. B., and Whalley, J., (1984), "Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey," *Journal of Economic Literature* vol. 22, pp. 1007-1051.

Shoven, J. B., and Whalley, J., (1992), *Applying General Equilibrium,* Cambridge University Press（小平裕訳『応用一般均衡分析—理論と実際—』，東洋経済新報社，1993 年）

Rutherford, T. F., (1989), General Equilibrium Modelling with MPS/GE.

Wolfram, S., (1996), *Mathematica Book,* 3rd edition, Wolfram Media/Cambridge University Press.（榊原進，武沢護ほか訳『Mathematica ブック（改訂第 3 版）』，トッパン，1998）

Wolfram, S., (1998), Mathematica Book, 3rd edition, Addendum（『Mathematica ブック日本語版第 3 版追加項目集』，トッパン，1999）