一般均衡モデルの構造と解法アルゴリズム*

小　平　　裕

1. イントロダクション

本稿は，応用一般均衡分析で利用するモデルの数学的構造と解法アルゴリズムを検討する。応用一般均衡分析の解法アルゴリズムは相補性条件の利用によって急速な発展を遂げてきた。以下ではさまざまな解法アルゴリズムとの関わりの中で一般均衡モデルの2通りのしかし同値の表し方を取上げる。

経済学における重要なそして強力なパラダイムは，さまざまな商品・サービス（以下，両者をまとめて財と呼ぶことにする）の需要と供給が価格の調整を通じて一致するという「価格に誘導される均衡」であろう。これは経済思想の始まりにまで遡ることのできる概念であり，今日でもなお活発に研究が続いている主題である。Smith の見えざる手，Walras の一般均衡体系と模索過程，Edgeworth の契約曲線，そして Arrow-Debreu-McKenzie の一般均衡の存在証明は，経済分析の歴史の中でも注目すべき

* 本稿は1991年度成城大学教員特別研究助成を受けた研究成果の一部である。

記念碑と言えよう。

Scarf (1967) の不動点アルゴリズムの研究，高性能な計算機の普及をきっかけにして「応用」一般均衡分析という分野が誕生した。これは，ある経済を一般均衡体系として実証的に表現し，その体系の均衡解を数値計算し，経済政策や制度などの与件が変化した時の解と比較することによって政策その他の評価を行うという，明確な政策志向，計算志向の意図を持つ分析手法である。

しかし一般均衡は基本的であるが分かり難い概念である。現実の経済は予測できない衝撃を常に受けており，滑らかな調整は阻止されている。市場が瞬時にクリアされることはない。短期的には，価格は硬直的であるかも知れないし，生産要素は特定の産業や地域に結び付いており自由に移動できないかも知れない。一般均衡理論の想定する価格調整過程が機能するには「時間」が必要である。所得，雇用，貨幣の短期理論と均衡価格形式の長期理論とは簡単には統合できない。ミクロ経済学とマクロ経済学の間には，主にその時間の見方の違いにより，なお大きな乖離がある。

このような困難があるにも関わらず，応用一般均衡分析は政策評価に広く利用されるようになってきた。その効果が反対方向になると考えられる幾種類もの政策を組合せて同時に実施する政策パッケージの評価には，これはとりわけ有用である。この手法を使えば，統一された枠組みの中で経済効率性と公平性の間のトレードオフを分析することが可能になる。これ迄このアプローチは，財政学，国際貿易，資本移動，開発経済学，エネルギー問題などのミクロ経済学の性格を持つ範囲で利用されている。

応用一般均衡モデルは均衡を計算するという目的のために一般均衡モデルにはない制約が加えられている。第 2 節ではそのような応用一般均衡モデルの特徴を説明する。続いて一般均衡モデルを構成する部品を順々に取上げ，その数学的な構造を検討する。すなわち第 3 節では需要関数の，第 4 節では生産技術の持つさまざまな性質を考察する。そして価格の取り方

を第5節で，最後に均衡の条件について第6節で取上げる。第7節では逐次的数値解法アルゴリズムの改善と一般均衡問題の解き方の変遷を展望し，第8節では応用一般均衡問題の数学的構造を調べ新しい解法アルゴリズムに理論的裏付けを与える。最後に第9節で応用一般均衡モデルの拡張を考え，本稿を締めくくる。

2. 応用一般均衡モデルの特徴

応用一般均衡分析は，勿論，Walrasの一般均衡理論の枠組みを利用するのであるが，定量的な政策分析を行うという目的のために operational なモデルを準備する必要があり，そのため Walras 本来の体系そのままを利用するのではなく幾つかの制限を加えている。本節では応用一般均衡分析で利用するモデルの特徴を説明する。本稿ではモデルの規模については明示的には言及していないが，われわれの関心は50前後の財を含む中規模あるいはそれ以上の大規模なモデルの応用一般均衡分析にある。したがって利用可能な解法アルゴリズムも暗黙裡に限定されている。

第1に想定する経済の市場形態に関しては，税，補助金などの租税政策や，最低賃金率や価格統制などの価格硬直性をはじめとする経済政策や制度は，ミクロ理論から見ると，価格の調整機構の歪みあるいは市場干渉に他ならないから，応用一般均衡分析で想定する市場構造は純粋競争ではなくなんらかの不完全性，非競争性を含んでいる。例えば，ある財への課税は消費者の支払う価格と生産者の受取る価格に乖離（「税の楔」）を生じさせる。また最低賃金率などの価格硬直性が存在すると，均衡価格を探索すべき範囲が制限されるし，また市場をクリアする価格が存在しない可能性すら生じる。

Shoven and Whalley (1973) は，税の存在するモデルにおける一般均衡の存在を証明し，それ以降研究された数多くの税やその他の不完全性を持つ応用一般均衡モデルに理論的裏付けを与えた。確かに現実の経済は純粋競

争ではなく不完全競争であるが，モデルにおけるその表わし方には理論的にも均衡解の計算アルゴリズム上も検討すべき重要な問題が多数残っている。均衡解の解法アルゴリズムは純粋競争の場合でさえ十分に難しいので，以下の分析は純粋競争の場合に限定し，非競争的な場合についての考察は将来の課題としたい。

第2に需要関数については，これを2回連続微分可能な集計的超過需要関数に考察を限定する。理論的に言えば，このことは効用を最大にする需要選択が消費集合の境界の上で生じる可能性を排除し，効用を最大にする消費選択の組合せではどの財の需要量も0にはならないと仮定することに等しい。この限定がどの程度制約になるか考えてみると，Mas-Colell (1985) は実質的な制約にはならないことを示している。すなわち最大化選択が消費集合の境界の上で生じる状態は可能性としては排除できないが，測度0という意味で稀であることを証明している。なお応用一般均衡モデルで実際に利用されている需要関数は全てこの条件を満たしている。

結局，線形あるいは区分的線形効用関数から導かれる微分不可能な需要関数が排除されることになるが，この場合には線形計画法によって問題を解くことができる。積分可能な需要関数は比較的容易に解けるという理由で，これも考察対象から外す。すなわち集計的需要関数がその基礎となっている効用関数を最大にする最適条件から導かれる場合には得られる需要関数は積分可能であることが知られており，この場合には実行可能な消費集合の上で効用関数を最大にすることによって一般均衡を容易に計算することができる。

最後に生産技術については，Scarf の一般均衡モデルの伝統に従いわれわれも線形生産技術を想定する。あらゆる凸の生産技術は原理的には線形技術によって近似することが可能であるとは言うものの，これは確かに制約的な仮定である。

換言すれば，非凸生産技術と規模に関する収穫不変の非線形技術は考察

対象から排除される。前者は，経済的にいえば規模に関する収穫逓増を意味し，この場合には競争均衡が存在しない可能性がある。しかし非凸の場合にはホモトピー法によって解けることが知られている[1]。他方，後者は例えば Cobb-Douglas, CES などの広く利用されている関数形を含み，一般均衡体系にとっては理論的にも実証研究にも重要である。幸いなことに，本稿で示される殆どの結果は収穫不変の非線形技術の場合へ拡張できることが知られている。

3. 需　　要

本節では一般均衡モデルの構成部品の内，需要を説明する。以下の一般均衡モデルにはm種類の財が存在するものとし，財の価格をm次元ベクトルpで表わすことにする。ただし$p>0$とする。以下，ベクトルは（勾配を除き）列ベクトルを意味するものと約束し，行ベクトルは転置記号^{T}を付けて表わす。またベクトルpの第i成分をp_iと書くことにする。

集計的市場超過需要を価格の関数としてm次元ベクトル$d(p)$と書くことにする。ここでは，記号の便宜を考えまた一般性を失うことなく，需要$d(p)$は財の初期賦存量がもし有ればそれを差し引いた「純」需要量を表わすものとする。需要$d(p)$の定義域としては原点を除く厳密に正の全ての価格の集合を考えるのが普通であるが，境界行動に関して何らかの仮定を置くこともある。したがって$d(p)$がその上で定義されないpの集合をUとすると，Uは$R^m{}_+$の境界を含みまた$0 \in U$である。そして需要の定義域Dは$D=R^m{}_+ \setminus U$と書かれる。

以下の分析ではDの上で次の性質を満たす需要関数$d(p)$を考えることにする。

（d1）　0次同次性：

1）　ただしホモトピー法の計算効率は現在のところ低く，小規模なモデルにしか利用できない。

任意の $\lambda>0$ にたいして $d(\lambda p)=d(p)$

(d2)　Walras 法則：

$p^T d(p)=0$

(d3)　下からの有界性：

$d(p)\geqq-\tau$ となる $\tau>0$ が存在する。

(d4)　2回連続微分可能性。

(d5)　境界行動：

任意の点列 $\{p^k\}_{k=1,2,\ldots}\to\bar{p}$ ただし $p^k\in D$, $\bar{p}\in U\setminus\{0\}$ にたいして $\|d(p^k)\|\to\infty$ が成立する。

0次同次性（d1）は，このモデルが一般均衡体系であることと，貨幣の中立性という暗黙裡の仮定から従う。個々の主体の需要関数に関するWalras 法則は「各個人は常に自分の予算制約式を満たす」ことを意味する条件であり，これは各個人の需要関数の非飽和性から従う。個々の主体についてこれが妥当する場合には，Walras 法則（d2）はそれを集計した市場需要関数についても成立する。下からの有界性（d3）は，経済的には，初期賦存量は有限であるという主張と解釈される。条件（d4）については既に論じた。境界行動（d5）は，均衡の存在，正則性，一意性を調べるための技術的な仮定である[2]。

財の中に本源的生産要素や中間財が含まれている場合には，需要関数 $d(p)$ の定義域に関して多少の注意が必要である。本源的生産要素は集計的需要量が一定で集計的賦存量に等しい財である。価格が0である場合には本源的生産要素の需要は通常の意味では定義されないから，以下では便宜的にこの時の需要を一定とし併せて無償処分を仮定する。したがって本源的生産要素がある場合には，需要関数が定義されない価格ベクトル p の集合 U を本源的生産要素の価格だけが正になるようなベクトルを全て含むように定義しなければならない。次に，中間財は集計的超過需要が恒等的に

2)　Kehoe (1982), Mas-Colell (1985) を参照せよ。

0である財である。したがって中間財の価格は需要関数の定義域Dには含まれない[3]。中間財価格は一般均衡解としては決定せず，利潤ゼロの条件から求められる。

需要関数 $d(p)$ の1階，2階の導関数を使って0次同次性（d1）とWalras 法則（d2）を書換えると，以下で利用する関係が示される。最初に0次同次性は Euler 法則を使えば，

(h1)　$\nabla d(p)=0$

となる。ただし∇は勾配（gradient）を表わす記号で，$\nabla d(p)$ の第 (i, j) 成分は $[\partial d_i(p)/\partial p_j]$ である。(h1) を微分すると，

(h2)　$\nabla d_i(p)=-p^T\nabla^2 d_i(p)$

を得る。Walras 法則（d2）を2回続けて微分すると，

(w1)　$\nabla^T d(p)p=-d(p)$

(w2)　$\sum_i p_i\nabla^2 d_i(p)=-[\nabla d(p)+\nabla^T d(p)]$

を得る。(h1)，(w1) は，$d(p)$ が恒等的に0である場合に限り $\nabla d(p)$ は対称であることを意味する。

4. 生　　産

一般均衡モデルにおける線形生産技術の数を（無償処分を除いて）nとすると，操業水準はn次元ベクトルyによって，生産技術係数は $m\times n$ 行列Aによって表わされる。また純産出量は多角錘 $\{Ay \mid y\geqq 0\}$ によって，各生産活動の単位操業水準当りの利潤は$A^T p$によって与えられる。生産活動の分割可能性と規模に関する収穫非逓増を仮定するのが典型的であるが，この場合には集計的生産可能性集合は閉かつ凸になる。また不活動の可能性も仮定される。

生産技術は次の性質を満たすと仮定される。

(a1)　供給が需要を上回っている財の超過供給分は無償で処分できる。

3)　すなわちm次元価格ベクトルという時のmには中間財の数は入っていない。

（a2）　桃源郷の否定：

$$Ay \geqq 0,\ y \geqq 0 \text{ ならば } Ay = 0$$

桃源郷の否定は，経済的には，生産技術をどのように組合わせても正の産出を得るためには何らかの投入を必要とすることと解釈される。（a2）は線形生産技術についての表現であるが，これを価格に関する条件として書直すと，

（a2′）　$A^T p \leqq 0$ となる $p > 0$ が存在する。

となる。すなわち（a2′）は，正の利潤を生まない正の価格ベクトルの存在を主張している。

5.　価格の取り方

ここで考察しているクラスの一般均衡モデルでは貨幣は中立的であるので，均衡解は相対価格のみを決定する。すなわち価格の取り方を変えても均衡解は変わらない。このことは，需要関数の0次同次性（d1）や，生産活動の利潤 $A^T p$ は価格に関して0次同次であるという事実に反映されている。価格正規化はこの自由度を除去し，価格の取り方を（任意ではあるが）一通りに決めるための工夫である。

原理的には，価格に関する1次同次の任意の非負関数 $h(p)$ を価格正規化に利用できる。例えば，

$$h(p) = (0, \ldots, 0, \overset{i\text{ 番目}}{1}, 0, \ldots, 0)^T$$

は，第 i 財を価値尺度財すなわちその価格が1に固定されている財とする場合である。他方，Mas-Colell (1985) は単位球を利用している。すなわち

$$\| p \| = 1$$

また単位シンプレックスが利用されることも多い（例えば Kehoe (1982)）。

$$e^T p = 1 \text{ ただし } e = (1, 1, \ldots, 1)^T$$

上述したように価格の取り方は均衡解に影響しないから，一般均衡問題

の理論上あるいは計算上の便宜を考慮して価格の取り方を選べば良い。ここでは一般的な線形正規化

$$h^T p=1 \text{ ただし } 0\neq h\geqq 0$$

を採用する。これは特殊な場合として価値尺度財($h=(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$)や単位シンプレックス ($h=(1, 1, ..., 1)^T$) の場合を含む。

6. 均衡の条件

以上で一般均衡モデルを構成する各部品の検討を終えたので，本節では均衡解を特徴付ける条件を考察しよう。一般均衡は以下の条件を満たす非負の価格ベクトル p と非負の操業水準ベクトル y の組合せである。

(e1) 需要が供給を上回ることはない：

$$d(p)\leqq Ay$$

(e2) 正の利潤は生じない：

$$A^T p\leqq 0$$

(e3) 価格正規化：

$$h^T p=1$$

(e4) 供給が需要を上回る財の価格は 0 となり，正の価格は市場がクリアされることを意味する：

$$p^T d(p)=p^T Ay$$

(e5) 正の水準で操業される活動の利潤は 0 となり，利潤が負になる活動は利用されない：

$$y^T A^T p=0$$

無償処分 (a1) は不等式 (e1) と等式 (e4) に反映されている。条件 (e5) は (e4) と Walras 法則 (d2) から導かれる。上述したように (e3) の代わりに他の価格の取り方を利用することもできる。

条件 (e4) は価格 p に関する不等式 (e1) の，(e5) は数量変数 y に関する (e2) の相補性条件である。ここで相補性とは，もし不等式が厳密に成

立するならば対応する変数は 0 となること，反対にもしその変数が厳密に正であれば不等式は等号で成立することを意味する。これは各不等式にそれぞれ対応する変数を掛けた積が等式になることを要求することと等しい。一般均衡モデルでは不等号の向きは全て同じ方向であり，変数は全て非負であるから，対応する不等式と相補性条件がそれぞれ相補的である場合そしてその場合に限り，積の総和は等号で成立する。

相補性は均衡解を定義するのに便利な性質であるが，特に一般均衡体系では（e1)，(e2) の実行可能な非負解は自動的に相補性条件（e4)，(e5) を満たす。このことは次のように証明される。(e4) の左辺は，Walras 法則（d2) により恒等的に 0 であり，したがって（e4) は（e5) と同値になる。また不等式（e1) の両辺に任意の $p \geqq 0$ を掛けると $p^T Ay \geqq 0$ を得，(e2) の両辺に任意の $y \geqq 0$ を掛けると $p^T Ay \leqq 0$ を得る。したがって $p^T Ay = 0$ が成立し，(e1)，(e2) の非負の可能解は（e4)，(e5) を満たす。これは，一般均衡体系は数学的には実行可能性問題として捉えることができることを意味する。

以上で検討した構造を持つ一般均衡体系が定義域 D の上に均衡を持つことは，需要と生産の性質によって保証される。例えば Kehoe (1982) を参照せよ。Kehoe の存在証明は境界行動（d5) を仮定しており，また本源的生産要素や中間財も考慮している。

7. 解法アルゴリズムの発展

ここで数値解法アルゴリズムの発展を展望しておこう。本稿の関心は一般均衡モデルの解法にあるのであるが，最初に部分均衡モデルについても触れておこう。部分均衡の枠組みでは，分析対象となる財以外はモデル内では決定されず与件としてモデルの外部から与えられる。部分均衡モデルの数学的構造はある種の単調性を持っており，Newton 法や Gauss-Seidel 法などの反復法が有限回数の内に収束することは保証されている。したがっ

て同程度の規模の一般均衡モデルに比べるとずっと容易に解くことができ，この分析方法はネットワーク，輸送問題などの分野の大規模モデルについて現在も利用されている。

Scarf (1960) は，大域的に不安定な Walras の模索過程の例を示した。すなわち需要が供給を上回る財の価格を引上げ反対に供給が上回る財の価格を引下げて価格ベクトルを改訂するという初歩的なアルゴリズムでは，均衡価格ベクトル以外の価格ベクトルから出発するとその調整過程は何時までも収束せず，均衡点に到達することはない。Scarf の例は一般均衡モデルでは反復法アルゴリズムの収束は一般的には保証されていないことを明らかにし，したがって一般均衡体系の数値解法にはもっと精緻なアルゴリズムが必要であることを主張している。

続いて Scarf (1967) は，そのような逐次的数値解法アルゴリズムを相補性問題の Lemke 法と不動点定理証明の Sperner 補題を組合せて開発した。このアルゴリズムは，

(i) 先ず価格シンプレックスを幾つかの小シンプレックスに分割しあるルールに従ってラベルを付けると，均衡点はラベルの完全な小シンプレックスに属すこと

そして

(ii) 任意の初期点から出発しても有限回の反復の内にそのような小シンプレックスに到着できること

という２つの性質に基づき，一般均衡体系の均衡解を逐次的，数値的に解く。すなわち，(i)により均衡解を求める問題はラベルの完全な小シンプレックスを見つけ出す問題に置換えられ，そのような探索が有限の回数の反復の内に完了することは(ii)により保証される。

Scarf の不動点アルゴリズムは Scarf 自身のその後の研究や他の人々の研究によって既に時代遅れになってしまった。現在利用されている逐次的数値解法アルゴリスムは，勾配に基づくものとそうでないものに分類でき

る。Newton 法，ホモトピー法は前者の例であり，各価格ベクトルにおける関数値だけではなく微分可能性を仮定して偏導関数値も利用する。一方 Merrill, Eaves, Saigal 等の区分的線形化法は後者の例であり，関数値だけを利用する。

解法アルゴリズムの発展と共に，応用一般均衡モデルの解き方も変化してきた。最初に考えられたのは，Arrow-Debreu-McKenzie の一般均衡解の存在証明の考え方に忠実な解き方である。すなわち一般均衡体系を数学的には連立方程式体系として捉えその不動点を計算するという考え方に基づき，具体的には Scarf 法あるいは区分的線形法などの不動点アルゴリズムを使って均衡点を求める。この方法の欠点は残念ながら計算効率が低いことであり，小規模なモデルを解くには差し支えないとしても，中規模，大規模なモデルには向かない。

そこで，一般均衡問題を同値の非線形計画法問題に定式化し直した上で，計算効率の優れている勾配に基づくアルゴリズムを利用して反復法で解くという第2の手法が工夫された。ひとたび Scarf アルゴリズムが確立されると，不動点問題の大部分は古くから知られていた Newton 法タイプのアルゴリズムで，しかも効率良く，解けることが判明したのは随分皮肉であった。

一般に，非線形計画法問題を有限回の計算手続きで正確に解くことはできない。反復法によって近似的に解を求めるには幾種類かの方法がある。応用一般均衡分析では，一般均衡問題を価格正規化の条件を利用して非線形相補性問題に変換し勾配法で解く方法と，非線形計画法問題に変換し線形近似してシンプレックス法を利用する方法が一般的に採用されている。前者では，反復解法の収束は必ずしも保証されていないが，もし収束すればそれは均衡点であることが証明される。他方，後者は必ず収束するが，収束した点が大域的最適点（＝均衡点）である保証はない。

どのアルゴリズムが優れているか一概には言えない。計算時間は

Newton 法などの勾配に基づくアルゴリズムの方が一般的に短くなる傾向があるが，区分的線形化法などの不動点法は有限回の反復の内に収束が保証されている（しかし非常に多い回数かも知れない)。また勾配の情報を利用する前者には，分析対象の問題によってはプログラム作成が面倒になる，線形生産技術あるいは弱い不等式を含むモデルに適用するのは難しい，という短所がある。

理想的な手法は Newton 法の長所（非線形方程式体系を素早く解く）と不動点法の長所（線形技術や弱い不等式制約のモデルにも適用し易い）を組合わせたものであろう。Mathiesen (1987) は，このような混合アプローチとして継起的線形相補性問題 SLCP アルゴリズムを開発した。Mathiesen 法は計算の初期段階では不動点法や線形計画法に似ており，操業水準が正の利用されている生産技術と有効な弱い意味の不等式制約を見つけ出す。そして一旦このような生産技術と不等式制約を識別すると SLCP アルゴリズムは Newton 法に切替わる。Mathiesen 法が常に収束すると言う保証はないが，これは実用上は非常に頑強である。

Preckel (1985) は，国際貿易と資本移動に関する 2 地域多期間モデルを使い，SLCP アルゴリズム，Newton 法，不動点アルゴリズム（Broadie (1985)）の 3 種類の解法アルゴリズムの効率性を比較している。そして自分の結論を一般化するのは危険であると但し書きをつけた上で，SLCP 法が最も優れていると述べている。

8. 問題の数学的構造

前節は相補性条件を利用したアルゴリズムの優位性を紹介した。本節では SLCP アルゴリズムを利用することの妥当性を理論的に裏付るために，一般均衡体系の 2 つの同値な表わし方を検討する。一方は非線形相補性問題 NLCP の形での表現であり，前節までの体系の説明に忠実に従っている。他方は非線形計画法 NLP を使った表現であり，これは相補性条件の

非負和の最小化から導かれる。最初に相補性問題を簡単に復習しておこう。

$f(z)$をベクトル$z \geqq 0$の上で定義された多価関数とする時に，一般非線形相補性問題 NLCP は次のように定義される。

[NLCP] 以下の条件を満たす解zを見つける。

$$z \geqq 0$$
$$f(z) \geqq 0$$
$$z^T f(z) = 0$$

2つの非負条件を満たす解は「可能解」feasible solution と呼ばれる。任意の可能解について，条件

$$全ての\ i\ について \qquad z_i f_i(z) \geqq 0$$

すなわち

$$z^T f(z) \geqq 0$$

が成立しなければならない。また「相補性解」は，相補性条件

$$全ての\ i\ について \qquad z_i f_i(z) = 0$$

を満たす可能解である。各項は非負であるから，この条件は

$$z^T f(z) = 0$$

と同値になる。この一般非線形相補性問題NLCPは，次のような同値の非線形計画法問題 NLP として表すことができる。

$$[\mathrm{NLP}] \quad \begin{aligned} &\text{minimize} \quad z^T f(z) \\ &\text{subject to} \quad z \geqq 0 \\ &\qquad\qquad\quad\ f(z) \geqq 0 \end{aligned}$$

ここで NLCP の目的関数は，実行可能域では0によって下から有界であることに注意しよう。NLCP の解の存在が与えられると，NLP の大域的最適解は NLCP 相補性解であり，逆も成立する。

価格正規化に関係する人工変数vを導入すると，第6節で構築した一般

均衡モデルは次のような非線形相補性問題 GE–NLCP として表現することができる。

［GE–NLCP］ 以下の条件を満たす相補性解を見つける。

(NLCP 1)	$-d(p)+Ay+hv$	$\geqq 0$	$\perp p \geqq 0$[4]
(NLCP 2)	$-A^T p$	$\geqq 0$	$\perp y \geqq 0$
(NLCP 3)	$-h^T p$	$=-1$	$\perp v$
(NLCP 4)	p	$\geqq 0$	
	y	$\geqq 0$	

ここで GE–NLCP の相補性条件は簡単な形に整理することができる。任意の可能解を採り，不等式(NLCP 1）の両辺に $p \geqq 0$ を，(NLCP 2）の両辺に $y \geqq 0$ を掛けて得られるスカラー不等式を足し合わせると

$$-p^T d(p)+p^T Ay+p^T hv-y^T A^T p \geqq 0$$

を得る。この不等式の左辺第 1 項は Walras 法則 (d2) により 0 であり, 第 2 項と第 4 項は相殺される。さらに（NLCP 3）より $p^T h=1$ であるから，この不等式を整理すると，結局

$$v \geqq 0$$

となる。すなわち GE–NLCP の任意の可能解において必ず $v \geqq 0$ が成立し，GE–NLCP の相補性解は $v=0$ が成立する時の可能解である。

次に GE–NLCP の条件と一般均衡モデルの均衡条件 (e1)－(e5) の同値性を示そう。不等式（NLCP 2）は丁度 (e2) に等しく，y の相補性条件は (e5) を意味する。(NLCP 3)の符号を逆にすれば(e3) になる。(NLCP 1）から人工変数の項 hv を差し引くと (e1) を得る。p の相補性条件は (e4) を意味する。人工変数の項 hv の存在は，GE–NLCP と一般均衡モデルの均衡における同値性の障害にはならない。と言うのは GE–NLCP の可能

4) 記号⊥は非負ベクトル $p \geqq 0$ の各成分は左側の不等式と対相補的であることを示す。

解においては $v \geqq 0$ であるからこの解は（e1）を満たさない可能性があるが，相補性解では $v=0$ となるので（e1），（e4）を満たすからである。

相補性条件が $v=0$ と簡単な形になるので，GE-NLCP に対応した非線形計画法問題 GE-NLP の構築は容易である。すなわち

［GE-NLP］ minimize v

subject to

(NLP 1)	$-d(p)+Ay+hv$	$\geqq 0$	$\perp \hat{p} \geqq 0$
(NLP 2)	$-A^T p$	$\geqq 0$	$\perp \hat{y} \geqq 0$
(NLP 3)	$-h^T p$	$=-1$	$\perp \hat{v}$
(NLP 4)	p	$\geqq 0$	
	y	$\geqq 0$	

GE-NLP の不等式は GE-NLCP のそれらと同一である。GE-NLP の Karash-Kuhn-Tucker 点では，各不等式は対応する Lagrange 乗数（$\hat{p}$, $\hat{y}$, $\hat{v}$）と相補性関係を持つ。GE-NLCP の場合と同様に，GE-NLP の任意の可能解において必ず $v \geqq 0$ が成立し，GE-NLP の大域的最適解は $v=0$ が成立する時の可能解であることが示される。

GE-NLP の大域的最適解は GE-NLCP の相補性解と同値であるから，一般均衡問題の均衡解との関係は GE-NLCP の場合と同じである。すなわち GE-NLP は（e1）に導入された人工変数 v の値を最小にすることを通じて，均衡条件（e1）-（e3）の可能解を求めている。

9. モデルの拡張

応用一般均衡分析の発展を考えるには，一般均衡モデルの精緻化と解法アルゴリズムの進歩とに分けて考察することが便利である。後者の解法アルゴリズムの進歩と新しいアルゴリズムに適した一般均衡モデルの表現については，第7節と第8節で紹介した。本節では前者の一般均衡モデル自

体の拡張を検討して，本稿の締めくくりとしたい。

一般均衡モデルの理論的制約として Scarf モデルの生産は線形技術によって表されており，そのために生産要素の間あるいは生産物の間の代替が認められないことを第2節で指摘したが，今日ではこの制約は緩和されている。すなわち生産集合が凸である限り，非線形の生産技術を取扱えるように拡張し，代替関係を考慮することが可能である。

第1の方法は線形計画法が大規模な体系の計算に利用できる唯一の実用的な方法であった時期に普及したもので，操業水準1単位当たりの投入財の組合せを予め多数特定しておき，非線形の生産技術を近似する。幾何学的にいえば，これは生産可能集合を本来の凸錐に対する多面体近似によって表すことになる。

しかし代替可能な生産技術をこのように予め特定することには，幾つかの困難がある。選ばれる技術の数が大変に少ない場合には，僅かな価格の変化にたいして産出量は大幅に変化する。また考え得る組合せの数が指数的に増加するので，この方法で3種類以上の投入物の間の同時代替を取扱うのは厄介である。

このような理由から第1の方法に代わり，列創出法 column generating technique が工夫された[5]。Newton 法，不動点法などの解法アルゴリズムの各反復において，一時的に投入物価格の仮の数値が与えられると操業水準1単位当たりの最適投入組合せを容易に計算できる。列創出法では，この投入産出係数を次に Scarf の技術係数行列Aに新しいベクトルとして含める。非線形生産関数を線形計画活動分析モデルで近似する方法としては，列創出法の方が第1の方法より優れている。

モデル精緻化のもう一つの方法は動学モデルへの発展である。市場における価格調整は「時間」を必要とするが，一般均衡体系では一般的な時間

5) Hudson and Jorgenson (1974) はこれを経済均衡モデルに適用した最初の1つである。

の取扱い方に関する合意は確立されていない。第１は反事実均衡分析と呼ばれる静学の方法で，現状と大幅な政策変更後に生じる仮設的な状況を比較する。ここではある均衡から次の均衡までの調整経路は分析されない。

貯蓄に対する税制改革の影響（Auerbach and Kotlikoff (1983)）やエネルギー政策の評価などの問題では途中の移行経路の分析が重要であり，明示的に時間を組入れた動学モデルが必要とされる。この分析方法としては，近視眼的，完全予見（千里眼的）の２種類のアプローチが利用されている。技術的にいえば，前者は継起的動学であり，後者は異時点間動学である。

完全予見モデルでは各商品には日付がついており，各経済主体は将来価格を矛盾なく予想する。価格ベクトルの均衡時間列の下で，各時点における各商品の供給と需要はバランスする。典型的には，計画視野は十分に長く，最終期以降の無限の計画視野について相対価格と数量は不変に留まると仮定される。しかし制度的な観点から完全予見モデルの妥当性には疑問がある[6)]。

他方，近視眼的モデルは一時に１期間しか扱わず，今期の均衡値が無限の将来まで成立すると仮定して，来期以降の価格，嗜好，技術，あるいは資源賦存量の変化を無視する。このアプローチでは矛盾した期待を排除できず，価格や数量がその長期均衡水準を上回ったり次には下回ったりと蜘蛛の巣サイクルになり易い。完全予見アプローチにはこのような問題は無いが，モデルの構造上，追加的データを必要とし，期間の数が増えるに連れて均衡計算の手間も指数的に増加する。したがって完全予見モデルの実用性は数値解法アルゴリズムの効率性に依存する。

動学的一般均衡モデルを解くことは静学モデルを解くよりも一層難しくなるが，調整費用，公表効果，借入れと負債返済，資源枯渇，期待に関連するその他の現象を取扱うのにはこれは体系だった方法である。今後，政策評価を一層科学的なものにしていくためには，動学モデルに基づく応用

6) 例えばある財を現在から100年あるいは150年後に手渡す契約の法的強制力。

一般均衡分析を行う必要があり，それには動学モデルを設計する人とそれを解くのに必要なアルゴリズムを提供する人の間で密接な関係を維持することが大切になろう。

参照文献

Auerbach, A. J., and L. J. Kotlikoff (1983), "National savings, economic welfare, and the structure of taxation," in: M. S. Feldstein, ed., *Behavioral Simulation Methods in Tax Policy Analysis* (University of Chicago Press).

Broadie, M. N., (1985), "An introduction to the octahedral algorithm for the computation of economic equilibria," *Mathematical Programming Study*, 23 : 121–143.

Hudson, E. A., and D. Jorgenson (1974), "U. S. energy policy and economic growth, 1975–2000," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 5 : 461–514.

Kehoe, T. J., (1982), "Regular production economies," *Journal of Mathematical Economics*, 10 : 147–176.

Mas-Colell, A., (1985), *The Theory of General Economic Equilibrium : A Differentiable Approach* (Cambridge University Press).

Mathiesen, L., (1987), "An algorithm based on a sequence of linear complementarity problems applied to Walrasian equilibrium : An example," *Mathematical Programming*, 37 : 1–18.

Preckel, P. V., (1985), "Alternative algorithms for computing economic equilibria," *Mathematical Programming Study*, 23.

Scarf, H. E., (1960), "Some examples of global instability of the competitive equilibium," *International Economic Review*, 1 : 157–172.

Scarf, H. E., (1967), "The approximation of fixed points of a continuous mappings," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 15 (5) : 1328–1342.

Shoven, J. B., and J. Whalley (1973), "General equilibrium with taxes : A computational procedure and an existence proof," *Review of Economic Studies*, 40 (4) : 475–489.