需要の弾力性について

小　平　　裕

1.　本稿の目的は，需要の弾力性の性質をまとめることである。

経済学でいう「弾力性」elasticity とは，「感応性」のことである。どのような関数についても，非説明関数（従属変数）の説明変数（独立変数）に関する弾力性を定義できる。1つの例として，需要関数

$$q = q(p, Y)$$

を考えれば，説明変数は p（価格）と Y（所得）であり，非説明関数は q（需要量）である。例えば，需要の所得弾力性 e_Y^d は，所得の変化率に対する需要の変化率の比率として定義され，所得 Y が 1％ 変化するとき，需要関数の関係から需要 q は何%変化するかを表す。次のように表される。

$$e_Y^d \equiv \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta Y}{Y}} = \frac{Y}{q}\frac{\Delta q}{\Delta Y} = \frac{\frac{\Delta q}{\Delta Y}}{\frac{q}{Y}} = \frac{Y}{q}\frac{dq}{dY} = \frac{d(log\, q)}{d(log\, Y)} = \frac{\hat{q}}{\hat{Y}}$$

ここで，第6の表現の変数の上の ^ は，当該変数の変化率を表す。つまり，$\hat{q} = \dfrac{dq}{q}$ である。変化率の演算については，以下の関係が知られている。ただし，α は定数である。

$$\widehat{(AB)} = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\widehat{\left(\frac{A}{B}\right)} = \hat{A} - \hat{B}$$

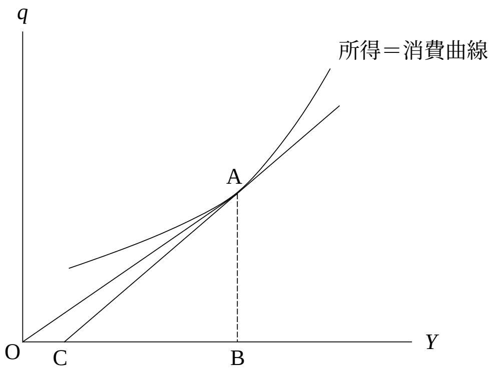
$$\widehat{(\alpha A)} = \alpha\hat{A}$$

$$\widehat{(A \pm B)} = \frac{A}{A+B}\hat{A} \pm \frac{B}{A+B}\hat{B}$$

2.　上の弾力性の定義式の第1と第6の表現 $e_Y^d = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta Y}{Y}} = \frac{\hat{q}}{\hat{Y}}$ は，説明変数と非説明関数の変化率の比という弾力性の定義から直ちに従う。もし需要の所得弾力性が1より大きければ（$e_Y^d > 1$ であれば)，所得 Y が変化するとき，需要量 q は所得 Y が変化する以上に変化することになる。この場合，需要は所得弾力的であるといわれる。このような財は奢侈品と呼ばれる。逆に，需要の所得弾力性が1より小さければ（$e_Y^d < 1$ であれば)，所得 Y が変化しても，需要量 q は所得 Y の変化ほどには変化しない。この場合，需要は所得非弾力的であるという。このような財は必需品と呼ばれる。また，需要の所得弾力性の符号によって，財を分類することもある。すなわち，需要の所得弾力性の値が正 ($e_Y^d > 0$) である財は正常財（上級財)，負 ($e_Y^d < 0$) である財は劣等財（下級財）と呼ばれる。

3.　定義式の第3の表現 $e_Y^d = \frac{\frac{\Delta q}{\Delta Y}}{\frac{q}{Y}}$ が示すように，需要の所得弾力性を平均消費性向（平均比率）$\frac{q}{Y}$ に対する限界消費性向（限界比率）$\frac{\Delta q}{\Delta Y}$ の割合と捉えると，弾力性を幾何的に理解することが容易になる。所得＝消費曲線のグラフ（**図1**）では，平均比率は所得＝消費曲線上の点 A と原点 O と結ぶ線分 AO の傾き $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}$ により与えられ，限界比率は点 A における接線 AC の傾き $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}$ によりあたえられるので，需要の価格弾力性は

$$e_Y^d = \frac{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}}{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CB}}$$



$e_Y^d > 1$ の場合

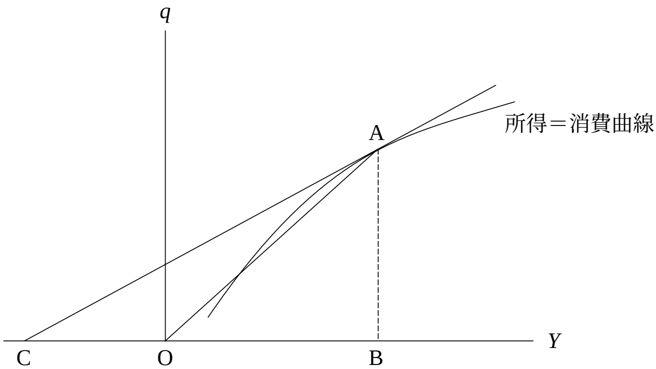


図1

と表すことができる。需要の価格弾力性 e_p^d の幾何的理解も同様に得られる（**図2**）。

$$e_Y^d = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{\Delta q}{\Delta p}}{\frac{p}{p}} = \frac{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}}{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CB}}$$

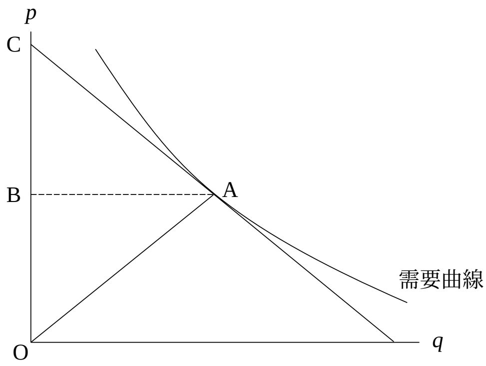


図 2

4.　最初に，需要の所得弾力性の間で成立する関係を調べよう。2 財（第 1 財と第 2 財）の場合を取り上げ，予算制約式

(1)　$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = Y$$

を考える。ただし，p_i は第 i 財 $(i = 1, 2)$ の価格，q_i は需要量，Y は所得（予算）である。(1) を変化率の形式に書き換えると，

(2)　$$\theta_1(\widehat{p_1} + \widehat{q_1}) + \theta_2(\widehat{p_2} + \widehat{q_2}) = \hat{Y}$$

を得る。ただし，$\theta_i = \dfrac{p_i q_i}{Y}$ は予算（総支出）に占める第 i 財への割合であり，$\theta_1 + \theta_2 = 1$ が成り立つ（(1) の両辺を Y で割れば，確認できる)。

ここで，第 1 財と第 2 財の需要の所得弾力性の関係を知るために，(2) において $\widehat{p_1} = \widehat{p_2} = 0$ とおき，両辺を $\hat{Y}$ で割れば，

(3)　$$\theta_1 e_Y^{d_1} + \theta_2 e_Y^{d_2} = 1$$

を得る。ただし，$e_Y^{d_i} \equiv \dfrac{\frac{\Delta d_i}{d_i}}{\frac{\Delta Y}{Y}}$ は第 i 財需要の所得弾力性 $(i = 1, 2)$ である。

(3) は，「当該財への支出割合を加重とする需要の所得弾力性の加重和は 1 に等しい」ことを意味する。この関係は財の数が増えても，一般的に成立する。

5.　次に，2 財のうち 1 つの財の価格だけが変化する場合の需要の価格弾力性の関係を見てみよう。例えば，第 1 財の価格だけが変化する場合を想定すると，(2) に $\widehat{p_2} = \hat{Y} = 0$ を代入して，

$$\theta_1(\widehat{p_1} + \widehat{q_1}) + \theta_2\widehat{q_2} = 0 \tag{4}$$

を得る。左辺第 1 項は，第 1 財への支出額の変化は (i) 価格 p_1 自身の変化と (ii) 需要量 q_1 自体の変化を通じて説明されることを示しており，第 2 項は第 2 財への支出額は（$\widehat{p_2} = 0$ としたので）は需要量 q_2 の変化を通じてのみ変化することを示している。そして，ここでは支出総額（所得）は一定である ($\hat{Y} = 0$) ので，両財への支出の変化は相殺し合うことも示している。(4) の両辺を $\widehat{p_1}$ で割って，弾力性の形に書き換えると，

$$\theta_1(1 + e_{p_1}^{d_1}) + \theta_2 e_{p_1}^{d_2} = 0 \tag{5}$$

と表される。ここで，$e_{p_1}^{d_1} \equiv \dfrac{\frac{\Delta q_1}{q_1}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}}$ は，第 1 財需要の第 1 財価格に関する（自己）価格弾力性であり，一般に（需要法則が成立する限り）負になる[1)]。$e_{p_1}^{d_2} \equiv \dfrac{\frac{\Delta q_2}{q_2}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}}$ は，第 2 財需要の第 1 財価格に関する交差価格弾力性である。

同様にして，第 2 財価格だけが変化する場合の第 2 財需要の（自己）価

---

1)　弾力性の値が正になるように定義する（すなわち，$e_{p_1}^{d_1} \equiv \left|\dfrac{\frac{\Delta q_1}{q_1}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}}\right|$ とする）慣習もあるが，ここでは従わない。

格弾力性 $e_{p_2}^{d_2} \equiv \frac{\frac{\Delta q_2}{q_2}}{\frac{\Delta p_2}{p_2}}$ と第１財需要の交差価格弾力性 $e_{p_2}^{d_1} \equiv \frac{\frac{\Delta q_1}{q_1}}{\frac{\Delta p_2}{p_2}}$ の関係も得られる。すなわち，(2) において $\widehat{p_1} = \hat{Y} = 0$ とおき，両辺を $\widehat{p_2}$ で割れば，求める関係

(6) $$\theta_1 e_{p_2}^{d_1} + \theta_2 (1 + e_{p_2}^{d_2}) = 0$$

が得られる。

この関係は，３財以上の世界にも容易に拡張できる。例えば，n 財の場合に第１財価格のみが変化するとすれば,

(7) $$\theta_1 (1 + e_{p_1}^{d_1}) + \theta_2 e_{p_1}^{d_2} + \cdots + \theta_n e_{p_1}^{d_n} = 0$$

という関係が得られる。ただし，$e_{p_j}^{d_i} \equiv \frac{\frac{\Delta q_i}{q_i}}{\frac{\Delta p_j}{p_j}}$ は第 i 財需要の第 j 財価格に関する交差価格弾力性 $(i \neq j)$ である。

6.　２財の場合に戻り，第１財価格 p_1 と所得（予算）Y は変化し得るが，第２財価格 p_2 は変化しない場合を想定しよう。第１財の需要関数は $q_1 = q_1 (p_1, p_2, Y)$ により与えられるから，第１財需要の変化率は

(8) $$\widehat{q_1} = e_{p_1}^{d_1} \widehat{p_1} + e_Y^{d_1} \hat{Y}$$

により与えられる。価格 p_1 が例えば上昇すると，実質所得は減少するので，財の需要 q_1 は減少する。これが，所得が補償されるときの変化，すなわち純粋な代替効果を求めるために考慮しなければならない所得効果である。所得の実質的な減少は，１次近似として，$\theta_1 \widehat{p_1}$ により与えられる。つまり，第１財価格 p_1 がある率で上昇すると，実質所得は当該財への支出割合に比例して減少する。したがって，所得（予算）を $\theta_1 \widehat{p_1}$ だけ増やす（補償する）ことにより，消費者は価格上昇前と同じ効用水準を維持す

ることができる。(8) の右辺の $\hat{Y}$ に $\theta_1 \widehat{p_1}$ を代入して得られる $\widehat{q_1}$ は，価格 p_1 が変化する場合に，実質所得が変化しないように所得が補償されるときの需要量の変化 $\widehat{q_1}^*$，すなわち第１財の補償された需要の変化率である。

(9) $$\widehat{q_1}^* = (e_{p_1}^{d_1} + \theta_1 e_Y^{d_1})\widehat{p_1}$$

両辺を p_1 で割れば，(9) は弾力性の形に書き換えられる。

$$e_{p_1}^{d_1{}^*} = e_{p_1}^{d_1} + \theta_1 e_Y^{d_1}$$

ここで，$e_{p_1}^{d_1{}^*}$ は，第１財価格 p_1 が変化するとき，実質所得は変化するが，消費者が同じ効用水準を維持できるように所得（予算）を補償して計測した第１財需要の第１財価格に関する補償自己価格弾力性である。これは，無差別曲線に即していえば，自己価格が変化するときの同一無差別曲線に沿った移動を示すから，代替効果の価格弾力性である。したがって，この式は，「補償された需要の（自己）価格弾力性 $e_{p_1}^{d_1{}^*}$ は，（補償されない）需要の価格弾力性 $e_{p_1}^{d_1}$ と支出割合 θ_1 で加重を付けた所得弾力性 $e_Y^{d_1}$ の和に等しい」ことを説明する。あるいは，

(10) $$e_{p_1}^{d_1} = e_{p_1}^{d_1{}^*} - \theta_1 e_Y^{d_1}$$

と書き換えれば，(10) は「（補償されない）需要の価格弾力性 $e_{p_1}^{d_1}$ は，代替効果 $e_{p_1}^{d_1{}^*}$ と所得効果 $\theta_1 e_Y^{d_1}$ に分解される」ことを示しており，Slutskii 方程式を弾力性の形で表現したものに他ならない。

　同様に，第２財の自己価格効果について

$$e_{p_2}^{d_2} = e_{p_2}^{d_2{}^*} - \theta_2 e_Y^{d_2}$$

を，交差価格効果についてはそれぞれ，

$$e_{p_2}^{d_1} = e_{p_2}^{d_1{}^*} - \theta_2 e_Y^{d_1}$$

$$e_{p_1}^{d_2} = e_{p_1}^{d_2{}^*} - \theta_1 \, e_Y^{d_2}$$

を導くことができる。ここで，$e_{p_j}^{d_i{}^*}$ は第 i 財需要の第 j 財価格に関する補償された交差価格弾力性である $(i \neq j)$。

（2財共に，他の条件が等しいとき，需要量が増せば増す程，効用が高くなる財，いわゆる good とすれば）無差別曲線は右下がりであるから，自己価格の代替効果の符号は一意に決まり，常に非正である。交差価格の代替効果の符号は正負両方の可能性がある。すなわち，補完財の代替効果は非負であり，代替財については非正である。所得効果の符号も一意に決まらない。当該財が正常財であれば，所得効果は正であり，劣等財については負である。

7.　次に，需要関数の0次同次性，すなわち全ての価格と所得（予算）が同じ率で変化するとき，需要量は変わらないという性質を弾力性の形で表すことを考えよう。

例えば，3財の場合における第1財の需要関数は，$q_1 = q_1(p_1, p_2, p_3, Y)$ により与えられる。そして，全ての価格 p_1，p_2，p_3，と所得 Y が変化するとき，第1財の需要 q_1 の変化率は，

$$\text{(11)} \qquad \widehat{q_1} = e_{p_1}^{d_1} \widehat{p_1} + e_{p_2}^{d_1} \widehat{p_2} + e_{p_3}^{d_1} \widehat{p_3} + e_Y^{d_1} \hat{Y}$$

と表される。とくに，$\widehat{p_1} = \widehat{p_2} = \widehat{p_3} = \hat{Y}$ の場合には需要関数の0次同次性により，$\widehat{q_1} = 0$ であるので，(11) より

$$\text{(12)} \qquad e_{p_1}^{d_1} + e_{p_2}^{d_1} + e_{p_3}^{d_1} + e_Y^{d_1} = 0$$

が得られる。すなわち，「ある財について需要の自己価格弾力性，全ての交差価格弾力性，所得弾力性の和は0になる」ことが分かる。

あるいは，Slutskii 方程式 (10) を (12) に代入し，$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ を利用して整理すると，補償された需要の価格弾力性についての関係

(13) $$e_{p_1}^{d_1{}^*} + e_{p_2}^{d_1{}^*} + e_{p_3}^{d_1{}^*} = 0$$

が得られる。すなわち，「ある財について，補償された需要の自己価格弾力性，全ての交差価格弾力性の和は０になる」ことが分かる。

とくに２財の場合には,

$$e_{p_1}^{d_1{}^*} + e_{p_2}^{d_1{}^*} = 0$$

$$e_{p_1}^{d_2{}^*} + e_{p_2}^{d_2{}^*} = 0$$

と書き換えられ,「補償された需要の自己価格弾力性と補償された需要の交差価格弾力性の和は０である」こと，すなわち両者の符号は異なることを意味する。ここで，補償された需要の自己価格弾力性は（原点に向かって凸である無差別曲線に沿った移動を意味するので）必ず非正であるから，上式は補償された需要の交差価格弾力性は必ず非負になることを示している。つまり，２財の場合には，その２種類の財は必ず互いに代替財になることを意味する。

さらに，２財の場合には,「支出割合で加重を付けた補償された需要の効果価格弾力性は等しい」（対称性），すなわち

(14) $$\theta_1 e_{p_2}^{d_1{}^*} = \theta_2 \ e_{p_1}^{d_2{}^*}$$

が成り立つ。

8. 最後に，問題を解いて本稿の締め括りとしよう。

（問題） ２財（第１財と第２財）の場合において，第１財の需要の所得弾力性は 1.0，自己価格弾力性は −2.0 であり，第１財への支出割合は 0.25 である。このとき,

(a) 第２財の需要の所得弾力性,

(b) 第 2 財の需要の第 1 財価格に関する交差価格弾力性,
(c) 第 1 財の需要の第 2 財価格に関する交差価格弾力性,
(d) 第 2 財の需要の自己価格弾力性
を求めよ。

(解答)　(a) 第 2 財の需要の所得弾力性は，(3) より，$e_Y^{d_2} = \dfrac{1}{\theta_2}(1 - \theta_1 e_Y^{d_1})$ により与えられる。また，題意より，$e_Y^{d_1} = 1.0$，$\theta_1 = 0.25$ であり，$\theta_2 = 1 - \theta_1 = 0.75$ である。これらを代入すると，第 2 財の需要の所得弾力性は

$$e_Y^{d_2} = \frac{1}{0.75}(1 - 0.25 \times 1.0) = 1.0$$

である。

(b) 第 2 財の需要の第 1 財価格に関する交差価格弾力性は，(5) より，$e_{p_1}^{d_2} = -\dfrac{\theta_1}{\theta_2}(1 + e_{p_1}^{d_1})$ により与えられる。ここに，$e_{p_1}^{d_1} = -2.0$，$\theta_1 = 0.25$，$\theta_2 = 0.75$ を代入すると，第 2 財の需要の第 1 財価格に関する交差価格弾力性は

$$e_{p_1}^{d_2} = \frac{0.25}{0.75}(1.0 + 2.0) = 1.0$$

である。

(c) 第 1 財の需要の第 2 財価格に関する交差価格弾力性は，(12) を 2 財の場合に書き換えれば，$e_{p_2}^{d_1} = -e_{p_1}^{d_1} - e_Y^{d_1}$ と表される。ここで，$e_{p_1}^{d_1} = -1.0$，$e_Y^{d_1} = 1.0$ であるから，第 1 財の需要の第 2 財価格に関する交差価格弾力性は

$$e_{p_2}^{d_1} = -(-2.0) - 1.0 = 1.0$$

である。

(d) 2財の場合の第2財に関する (12) と同様の関係

$$e^{d_2}_{p_1} + e^{d_{21}}_{p_2} + e^{d_2}_{Y} = 0$$

に対して，$e^{d_2}_{p_1} = 1.0$，$e^{d_2}_{Y} = 1.0$ を代入すると，第2財の需要の自己価格弾力性

$$e^{d_2}_{p_2} = -(e^{d_2}_{p_1} + e^{d_2}_{Y}) = -(1.0 + 1.0) = -2.0$$

が求められる。

（比較静学の応用問題）　政府が供給者（生産者）に商品1単位の取引につき t 円の税を新たに課税する状況を取り上げて，租税の帰着 tax incidence を説明せよ。

（解答）　課税により，税込みの供給曲線は S_0 から税 t の分だけ上方に平行移動する。課税後の供給曲線を S_1 とする。需要曲線 D は変わらない。均衡は，課税前の $E_0 = (q_0, p_0)$ から課税後の $E_1 = (q_1, p_1)$ に変化する（**図3**）。ここで，p_1 は課税後に需要者（消費者）が支払う価格であり，供

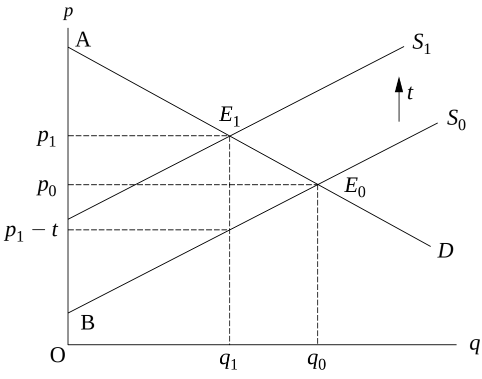


図3

給者が受け取る価格ではない。課税後に供給者が受け取る価格は税引き後の $p_1 - t$ であり，これは課税後の数量 q_1 を与える課税前の供給曲線 S_0 の高さにより与えられる。

このように，生産者に課税されたとしても，その結果として価格が上昇し，税 t の一部 $p_1 - p_0$ は需要者により負担され，供給者が負担するのは $p_0 - (p_1 - t)$ にとどまる。需要者（消費者）と供給者（生産者）の税の負担割合は，需要の価格弾力性 $e_p^d = \dfrac{p_0 \mathrm{O}}{\mathrm{A}p_0}$ と供給の価格弾力性 $e_p^s = \dfrac{p_0 \mathrm{O}}{p_0 \mathrm{B}}$ を使えば，

$$(p_1 - p_0) : (p_0 - p_1 + t) = \frac{1}{\left|e_p^d\right|} : \frac{1}{e_p^s}$$

により与えられる。したがって，需要あるいは供給の価格弾力性が極端に小さいあるいは大きい（例えば，0あるいは無限大である）場合には，需要者あるいは供給者の一方が税の大半を負担することになる。

参　照　文　献

Paul A. Samuelson (1947), *Foundations of Economic Analysis,* Harvard University Press, Enlarged ed., 1983（佐藤隆三訳『経済分析の基礎』勁草書房，1967年，増補版1986年）

John R. Hicks (1939), *Value and Capital, An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory,* Clarendon Press（安井琢磨，熊谷尚夫訳『価値と資本―経済理論の若干の基本原理に関する研究―』岩波書店，1951年，岩波文庫1995年）

Evgenii Slutskii (1915), “Sulla teoria del bilancio del consummatore”, *Giornale degli Economisti* (“On the Theory of the Consumer”)