

数理芸術学への試み（Ⅱ）

——文芸系一般教育物理の窓から——

（‘かたち’の中にひそむ数理）

佐 治 晴 夫

1. はじめに

さきに，“数理芸術学（Ⅰ）”（「成城文藝」第111号）と題して自然の中にひそむ基本的な性質が，いかに音楽の中に反映しているかについて，〈ゆらぎ（fluctuation）〉という立場からの論考を試みた¹⁾。そこでは，音の時系列としての音楽が一つの数学的モデルの中のスペクトルとしてとらえられている。しかも，音楽という，われわれの macro な認識過程の上に構築される世界の中に，micro 世界に特有な自然法則が見えかくれしているという事実には，われわれ生物系をふくめた上で micro から macro までの世界を包括する統一的解釈への一つの指標がふくまれているように思う。

この数学と音楽との間にみられるある種の類似性，あるいは並行性は，音楽が芸術の中で最も抽象的なものであり，数学はまた，科学の中で最も抽象的であるという共通点において理解されるが，それはまた，この両者と人間がかかわるとき，その存在価値がつねに審美的基準により判断されるという共通点にも由来している。その審美的基準に関するひとつの客観的側面として〈ゆらぎ〉をとりあげたのが前回の論文であった。

本論文では，さらに視点をひろげ，芸術的創造と科学的発見の並行性の要となっている審美的感性をみた上で，〈かたち〉の奥にひそむ美の数理を〈対称性の破れ〉という立場から論ずると共に，実在のモデル化

に関する新しい数学的手法としての〈フラクタル幾何学〉についての論考を試みたい。そして、前論文のときと同様に、文系と理系が風通しよく話し合える広場を模索し、Liberal Arts Education としての自然科学教育のあり方について、ひとつの提言をしようとするものである。

尚、本論文は、成城大学文芸学部一般教育物理および芸術学総合講座、さらに成城大学全学学生を対象にした〈数学一物理に関する自主公開土曜講座〉でとりあげた話題の一部をまとめたものである。

2. 科学的発見と美意識

自然科学、とりわけ物理学は、自然界の奥深くに存在すると思われる最も基本的かつ普遍的な法則の模索にある。かつて Galileo Galilei (1564—1642) は、物体の運動を記述する際の相対性から、基本的な自然の性質を予見したが、それをうけて、Johannes Kepler (1571—1630) は、Tycho Brahe (1546—1601) が多年観測した火星の位置を解析することによって、いわゆる〈ケプラーの法則〉を発見した。それはさらに、Sir Isaac Newton (1643—1727) がそれらの手法を数学的に定式化して〈ニュートン力学〉を構築するに至って、人間レベルの世界と宇宙レベルの世界に一つの〈かけ橋〉が架けられることになる。いいかえれば、自らの手を離れて地表面に落ちる小石の運動と、たとえば、地球が太陽のまわりを公転するというような天体の運動とは、地球が永遠に太陽に向かって落ち続けるとみなすことにより、まったく同一な“落体に関する基本法則”によって記述されるということの発見であった。

ところで、この宇宙の調和ともいいくべき偉大な法則は、今日われわれが考えているような意味での〈科学的〉、〈分析的〉あるいは〈合理的〉な態度によって自然を研究することによって発見されたというよりも、むしろ唯一の神の意志を知ろうという強い欲求に支えられて、彼らの科学体系を築きあげていこうとする熱意が、もたらしたものであることを見逃すわけにはいかない。彼らはいずれも〔彼らの自然についての知識を、信ずる神の作品の内部に刻まれた造り手の計画を知り、その栄光を賛えることを目的として、追求し続けていた〕のである。Galilei の宗教裁判を科学と宗教の対立の“あかし”であるかのように把えるのは大きな誤解である。これは、むしろキリスト教派間の対立に派生する事件

にたまたま Galilei が巻き込まれた結果であって、もともと近代科学とキリスト教は対立的ではなく、むしろ相補的であったというべきであろう。一例をあげれば、今日のように計算手段の発達していない当時にあって、Tycho Brahe の膨大な観測データをもとにして単純な法則を導いた Kepler の場合など、神への強い信仰——すなわち、全能の神が造り給うたこの世界は数理的な美と調和に満ちているはずであるという強い確信——なしには到底なしえられなかつたはずであり、法則の発見は奇跡的ですらある。こうして考えてみると、自然の中に数理を見いだしてゆく人間の知識 (scientia) は、單に人間に現世的な幸福をもたらす能力 (potentia) を備えているということ以前に、人間の本性と深くかかわるであろう基本的な問題をふくんでいるようにも思われる。

ところで、科学者たちは自分自身や他の科学者たちの仕事について語るとき、誉め言葉として、絵画、音楽、詩歌などいわゆる芸術作品にたいしてと同じように〈美しい〉とか〈エレガント、優美一流麗な〉、あるいは〈無駄がない〉といった用語を陶然として使う。これは彼らが真理の正当性について語るとき、いつも審美的基準を導入していることを物語っている。このことは現代物理学を支える 2 本の大きな柱である相対性理論と量子論の形成過程において容易に確かめることができる。Albert Einstein (1879—1955), Niels Bohr (1885—1962), Erwin Schrödinger (1887—1961), Werner Heisenberg (1901—1976) そして Paul Dirac (1902—1984) など、これらの理論の創始者たちは、いずれも美学としての数学の枠組みに固執した。彼らは現実に存在する未解決の問題への解答をうるために理論を構築したというより、むしろ、〈自然はかくあるべきもの〉という自然の根本原理を美学的立場から理論として書きあげていった。その際に象徴的言語として使われる数学は、はじめから用意されているもののみならず、必要に応じて新しく創りだされることさえ少なからずあった。Dirac によって導入された $\langle \delta \text{ 関数} \rangle$ はその代表例である。そこには、数学のような純粹論理がトートロジーに陥ってしまうことを回避するために、あえて直観と真の審美的センスに頼っていこうとする姿勢が窺われる。この点に関して Henri Poincaré (1854—1912) の言葉は極めて示唆的である²⁾。

純粹論理ではトートロジー以外のものに達することはできない。

なにも新しいことを生まず、論理だけからではそんな科学もでてこない。ある意味では、これらの学者たちは正しい。算術をするにも、幾何学をし、あるいはどんな科学をするのにも劣らず、純粹論理以外のなにものかが必要なのである。このなか他のもを指示するには、直観以外に言葉は見当たらない。

Poincaré はさらに直観と美学の連関にまで話をすすめている³⁾。

数学的証明といえば、知性しか関係ないように見えるかもしれないが、その証明に関連して感性が導入されねばならない、といったら驚くべきことのように思われるかもしれない。しかし、もしもわれわれが心の内に数学的美や、数や形体の調和、幾何学的エレガンスにたいするセンスがないとしたら、数学的証明などはできない。真の審美的センスこそ、すべての数学者が認めていることである。そして、これこそ本当に感性なのである。

さらに付け加えるならば、Schrödinger が経験的データと矛盾するのを承知の上で彼の最初の波動方程式を書き上げたのは、自分の方程式を実験結果に適合させるより美を優先したからであった。勿論、この不一致は実験結果の解釈において些細な性質を見落としていたためであることが後に判明し、方程式の正当性があらためて確認されたのは有名な話である。

このように、物理学とは既存の数学や観測事実の上に立って、限られた対象に対してのみ論考を試みていくものではなく、ある意味では〈未知のものを解明し、そして表現していくとする態度〉であって、芸術における創造活動と極めて近い位置にあるものといえよう。

ここで、Heisenberg が物理学と詩の言葉は相等しいとした Bohr の思い出を語る一節を引用しておこう⁴⁾。

……原子の場面になると、言語は詩の中でのようにしか使えない。詩人もまた、事実を記述することよりもイメージを創り、心的連関を築くほうに関心がある。……量子論は、われわれが関連を十分に承知しているものの、語るとなるとイメージと比喩でしか語れない

ということを示す驚くべき例を提供している……。

3. 〈かたち〉の中にひそむ数理

自然の奥にひそむ法則性の探求には、それが視覚的なものであれ、抽象的なものであれ、ひとつのモデル設定からはじまる。それはまた〈かたち〉の設定である。過去においてなされた科学上の重大な発見を顧りみる時、このモデル化の問題には、モデルの形式、発展、有効性において審美的考慮が少なからず影響を及ぼしていることを見るのは容易である。たとえば、Dirac の量子論における物理量演算子の交換関係、現代素粒子論の出発的となった対称性、古くは Bohr や長岡半太郎らによる幾何学的な原子構造モデルなど枚挙にいとまがない⁵⁾。自然の中に存在する〈実在〉をつかまえる正しい形式、すなわちモデルは、ほとんど魔術的な力さえもち、そのモデルによってまったく新しいアイデアや観念が明晰化され、我々を実在の住み家へと誘うのである。〈かたち〉というもののもつ魅力は、それが絶対的尺度という定量的制約から解き放たれ、本性に根ざす“より本質的なもの”として抽象化され、一般化されるところにある。たとえば、幾何学的図形を例にとれば、〈相似形〉という概念は個々の尺度や大きさをこえて、ある〈かたち〉全体の性質に関する一般表現を与える。そのような意味において、〈かたち〉の美の中に数理の美が潜んでいたとしても、それはけっして偶然のことではなく、むしろ当然のこととして受けとめるべきであろう。

さて、〈かたち〉の美は、その〈対称性〉と〈対称性の破れ〉との対比において具現される。この対比は宇宙の誕生から進化、そして自然の究極構造などを考える最も基本的な科学の分野で極めて中心的な位置を占めている。素粒子論を例にとれば、素粒子の識別不可能性が〈対称性〉を生み、識別不可能であるが故に互いの素粒子間に相互作用が生じ、それによって〈対称性〉を破りながら物質をつくり宇宙を進化させてきたということで、〈対称性〉とその〈破れ〉という相矛盾する性格が互いに共存しつつ調和するところに我々の宇宙の存在が許されている。この論点に立って日本の美と西欧、とりわけギリシャ文化の流れの中に見られる美について考えてみよう。

たとえば、日本古代の美の殿堂、法隆寺には $\sqrt{2}$ がいたるところに

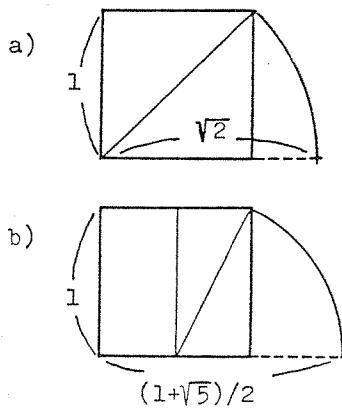
ちりばめられている。夢殿の外壁の枠組にみられる縦横比、五重塔の最上層と最下層の屋根の幅の比、中門の上層と下層の屋根の幅の比、金堂正面の上層と下層の幅の比、さらに中門と金堂の床面積の比など、すべて $1 : \sqrt{2}$ である。その他、明治初年までは御物として法隆寺にあったと言われている聖徳太子像（現在宮内庁所蔵、百済の阿佐太子の作といわれている）における左右の王子と中央の太子の背丈の比など絵画の面においても $1 : \sqrt{2}$ の比がみられる⁶⁾。

一方、Athens の Parthenon 神殿の高さと間口の比をはじめとして、たとえば Leonardo da Vinci や Piter Cornelis Mondriaan など西欧の一般絵画の中で好んで使われてきた美の比率はいわゆる黄金比、すなわち $1 : (1 + \sqrt{5})/2$ である。勿論、日本の絵画、建築などの中にもこの黄金比が見られるが、これはペルシャを通じて明代の中国へ流入し、それが室町幕府の親明政策の波にのって日本に移入したものだとされている。葛飾北斎の富岳三十六景の中の構図や桂離宮の建物や造園、あるいは能面の形にいたるまで、黄金比を美の基本として捉えている例は多い⁷⁾。

さて、周知のようにこれらの比率は、いずれも正方形と円との組み合わせからつくられる。すなわち、 $1 : \sqrt{2}$ は与えられた正方形の一辺と対角線、あるいはその正方形の外接円の直径との比であり、黄金比は与えられた正方形の一辺とその正方形を二等分することによってつくられる長方形の対角線にもとの正方形の一辺の長さの半分を加えたものとの比である。いずれも正方形という対称性の高いかたちに、さらに対称性の高い円を組み合わせて対称性を破るという操作によって生み出された比率である。第1図 a), b) にその作図法を示す。

ところで、 $\sqrt{2}$ は円に内接する正方形の形で与えられるが、これは日本古来の建材であった木材の丸太から最大一辺を有する角材を切り出すための方法と関連してい

第1図 $\sqrt{2}$ 長方形と黄金長方形の作図



るとも思われる。これに対して、黄金比は西欧古代の建材としての石の角材を切断するプロセスにおいて発見されてきたようにも思われる。いずれも、それぞれの地域や自然、時代と深く係わりながら美の基準が形成されていったであろうことは否めない。

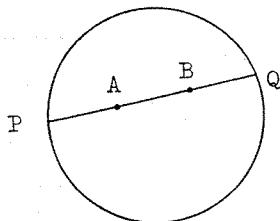
さて、平面の中に奥行きを与える絵画の手法として perspective (遠近法) の発見があるが、これもまた、画面自身をつくる空間を奥行きに応じて歪ませること、いいかえれば対称性を破ることによって達成されたものである。さらに、これをおすすめ、非ユークリッド性にもとづく二次元平面の対称性を崩してゆくと、二次元平面の中に無限をとりこむことが可能になる。これは、たとえば入れ子構造をもつ〈曼荼羅〉に見られるようにパターンの外周が宇宙の果てになるような構成を可能ならしめる。ここで最も対称性の高い円を例にとって、円の対称性を非ユークリッド的にくずすことによって、円周が無限遠点、すなわち〈世界の果て〉になる例を示してみよう。

いま、第2図に示すように、ひとつの円を考え、この中に2点 A, B があるとする。それらを結ぶ直線が円周と交わる点を P, Q とし、 A, B, P, Q が非調和比すなわち $(AB, PQ) = (AP/BP) : (AQ/BQ)$ をなしているとして、線分 AB の長さ (\overline{AB}) を、適当な定数 c を持ってきて

$$\overline{AB} = c \cdot \log(AB, PQ)$$

のように定義する。このとき、たとえば、 B が Q に限りなく近づいた場合、 (AB, PQ) は限りなく 0 に近づき、したがって、線分 AB の長さは限りなく大きくなる。すなわち Q は A から限りなく離れ、円周は〈世界の果て〉になる。このような世界は、たとえば、Mauritz Cornelis Escher の絵画などにも見られる⁸⁾。

第2図 円周が〈世界の果て〉になる非ユークリッド世界



$$\overline{AB} = c \cdot \log(AB, PQ)$$

if $B \rightarrow Q$
then $\overline{AB} \rightarrow \infty$

さてここで、ひろく自然界の中における〈かたち〉の形成について簡単にふれておこう。前に識別不可能性、すなわち対称性が破れて識別可能な〈かたち〉が生まれると書いた。周知のように、この自然は互いに識別不可能な多数の基本粒子からできている。いま、識別不可能な2つの粒子 A, B がX軸上の2点 X_A, X_B にあって、それぞれの間の距離を $X=X_A-X_B$ とすれば、この2粒子系の状態ベクトルは $\Psi(X)$ と書くことができる。このとき、 A, B は識別不可能なのであるから A, B のいれかえに対し $\Psi(X)$ は不变でなければならず、さらに、粒子が実際に見いだされる確率は状態ベクトルの二乗で与えられるから

$$|\Psi(X)|^2 = |\Psi(-X)|^2$$

$$\text{これより } \Psi(X) = \Psi(-X)$$

$$\text{または } \Psi(X) = -\Psi(-X)$$

すなわち、 $\Psi(X)$ は X に対して偶関数であるあるいは奇関数のいずれかである。いいかえれば、前者の場合には2粒子が重なる傾向にあり、したがって粒子間に引力が、後者の場合には2粒子が離れる傾向、すなわち斥力が作用することになり、それらの力のバランスにおいて粒子系が秩序をもった構造を構成していくことが可能になる⁹⁾（厳密には交換力と Pauli の排他律という立場から議論せねばならない）。たとえば、水分子は互いに識別できないが故に、力を及ぼしあい、引力と斥力の調和において美しい雪の結晶を形成することができる。しかも結晶化は、分子たちの無秩序な動きの中の〈ゆらぎ〉がきっかけとなって熱力学的な対称性が破れることにより始まる。このメカニズムは、たとえば1円玉を静かな水面上にランダムに浮かべて、水面を静かに振動させると、美しい六角形に配列することからも理解されるであろう。これはまた、同じ大きさの球をすきまなく並べながら重ねていくと、幾何学的制約から立方最密構造あるいは六方最密構造とよばれる構造がえられることとも関連しており、自然界の〈無駄のなさ〉が雪結晶の美をつくりだしているとも考えられよう。これはまた、〈無駄のなさ〉が〈対称性の破れ〉によって、創り出されているということでもある。さらにつづくわえるならば、富士山の美しい〈かたち〉、神社仏閣の屋根のそり、あるいは港に停泊している船と岸壁を結ぶロープがつくる美しい曲線、これらは、いずれも首飾りや電線が重力をうけて最も〈無駄なく〉自然に懸垂したときのかたち、すなわち〈懸垂線 (Catenary)〉とよばれる数学的曲線〔一般形は

$y=a \cdot \cosh(x/a) = (a/2) \{ \exp(x/a) + \exp(-x/a) \}$ を基本形として表現されるということも興味深い。

また〈無駄のなさ〉が美につながるという立場から、 $\sqrt{2}$ 長方形は、それ自身を2等分したときに、もとの形と相似形になり、用紙の裁断という見地からも理想的であるという事実に想いを馳せてみるのも一興であろう。ちなみにA判とはAOを縦1,189 mm、横841 mmで面積が、 0.999949 m^2 、B判とはBOを縦1,456 mm、横1,030 mm、面積1.477680 m^2 の形としてとりきめ、それぞれをn等分したものとAn(Bn)判と定義している。

このように日本古来の美は、その中にみられる〈無駄のなさ〉に負うところもけっして少なくないが、これはまた能や茶道など日本の古典芸能の中にみられる〈かたち〉にもうかがいみることができる。ついでながら、俳句、短歌などにみられる五七調もまた五と七の比が1: $\sqrt{2}$ に極めて近いということは単なる偶然であろうか。

4. 〈かたち〉の一般表現としての Fractal

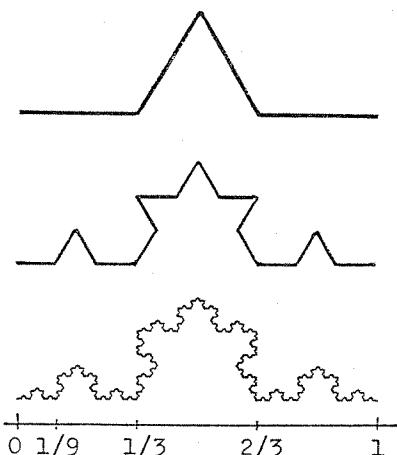
前節では、いわゆるユークリッド幾何学的な〈かたち〉の中にひそむ数理について考えてきた。ところで、我々が自然を前にして美しいと感ずるとき、その〈かたち〉がつねに幾何学的なものであるとは限らない。たとえば、四季おりおりの雲や樹木がおりなす〈かたち〉、風や溪流の動きの中にみられる渦巻きの数々、あるいは山や海岸線にみられる曲線など、この一見すると〈規則性〉などないとおもわれるような〈かたち〉の中に数理を見いだしていくとする試みは、1975年にB.B.Mandelbrotによって発見されたFractal幾何学を適用することによって、かなりのところまで可能ではないかと思われる¹⁰⁾。実は、前論文でとりあつかった音楽の中における1/fスペクトルも自然がもつFractal性と強く係わっているようである。ここで“ようである”と書いたのは、Fractal幾何学自身、現在、研究の途上にあり、数学としてはまだ完成していないものであるため、厳密な検討がなされていないためである。いずれにしても、今日にいたるまで、ユークリッド幾何学が〈形のないもの〉として放置してきた〈かたち〉、すなわち自然が示す複雑な〈かたち〉を〈無定形の形態学〉として真っ向からとらえようと

いうのが Fractal 幾何学である。そこで、本節では、その数学的性質の奥に潜む規則性の中に、自然の本性に根ざす美への予感を探ってみたいと思う。

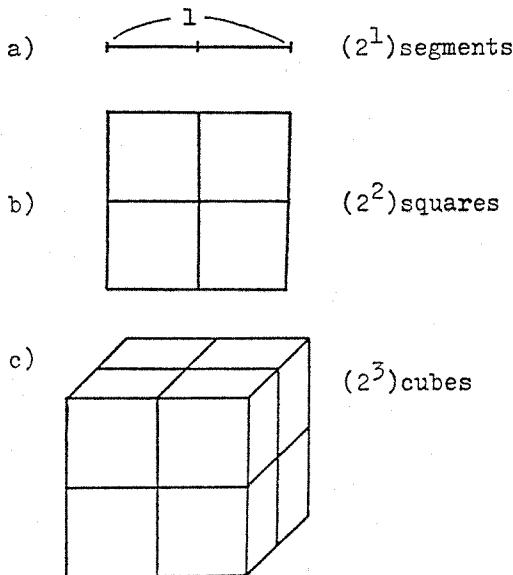
さて、Fractal という言葉は Mandelbrot の造語であり、もともとラテン語の形容詞 *fractus*（小さく不規則に砕かれた小片）に由来している。“*Noemen est numen* (名づけることは知ることである)” ということわざの通り、この Fractal という言葉は、たとえば、ある曲線を拡大しても、もとの曲線と同じような複雑さをもち、滑らかさを欠いているために、接線のひきようがなく微分不可能な性質を示すものとして妥当なものであろう。つまり、Fractal とは、ある〈かたち〉の部分をどんなに拡大しても、つぎからつぎへと似た〈かたち〉が現われ、いつまでも〈特徴的な長さ〉を定義することができず、いいかえれば、ある部分を拡大してみると、全体、あるいは、より大きな部分と同じような〈かたち〉を有する性質（自己相似性）であるといつてもよい。

一例として、Helge von Koch によって発見された、いわゆる Koch 曲線を、第3図に示す。どの部分をとっても、より大きい部分、または、全体と相似であることがみてとれるであろう。この場合、曲線をよりこまかく近似していくほど、全体の長さは大きくなり、結局、無限大に発散してしまう。つまり〈特徴的な長さ〉をもたない曲線である。このような〈かたち〉を特徴づける量として〈相似次元〉、あるいは〈Hausdorff 次元〉がある。理解を容易ならしめるために、前者について考えてみよう。いま、第4図 a), b), c) のように、単位の大きさをもつ線分、正方形、立方体を考える。いま、単位の長さを $1/2$ にすると、もとの線分と相似な線分 $2 (=2^1)$ 個になり、正方形は $4 (=2^2)$ 個、そして立方体は $8 (=2^3)$ 個の相似な図形を生み出していく。すなわち、ある図

第3図 Koch 曲線の構造



第4図 分割と次元



形が、その全体を $1/a$ に縮小した相似图形 $a^D (=b)$ 個によって構成されるとき、この D が图形の次元として意味をもつことがわかる。このとき、相似次元は

$$D = \log b / \log a$$

Koch 曲線の場合は、全体を $1/3$ にすると相似形 4 個によって構成されるから

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.2618\ldots$$

という非整数次元をもつことがわかる。この議論をさらに拡張すると、厳密な相似性を有しない图形の場合についても、Hausdorff 次元 D_H を定義することができる。これは、ランダムなものも含めた任意の图形に適用できるように、集合としての图形を被覆することによって定義するものである。すなわち、集合 E を直径が $\epsilon > 0$ よりも小さい可算個の球によって覆うとき、各球の直径を d_1, d_2, \dots, d_k とすると

$$M_D(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \sum_k d_k^D$$

によって D 次元 Hausdorff 測度を定義し、この量が 0 から無限大に遷移するとき、 D を集合 E の Hausdorff 次元とよび D_H で表わすの

が通例である¹¹⁾。このように非整数値を取り得る次元のことをまとめて以後〈Fractal 次元〉とよぶことにしよう。

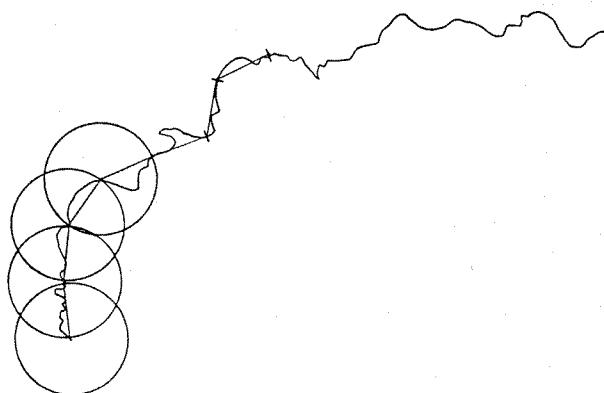
つぎに、あたえられた〈かたち〉に対する Fractal 次元を実際に求める方法について簡単にふれておこう。

まず、前述の相似性次元の考え方から容易に類推できるように、与えられた図形の〈かたち〉を特徴的な長さをもつ基本的な図形、たとえば、円や正方形、あるいは線分などによって近似し、それらの基本図形の大きさの変化に対して、与えられた図形の大きさがどのように変化していくかをみればよい。この 2 つの対応する量の対数をとってプロットすれば、その傾きから Fractal 次元を見積ることができる。たとえば、ある曲線の Fractal 次元 D は、長さ r の線分を基準の長さとしてそれらの折れ線で近似したときの曲線全体の長さが $N(r)$ であるとすれば、

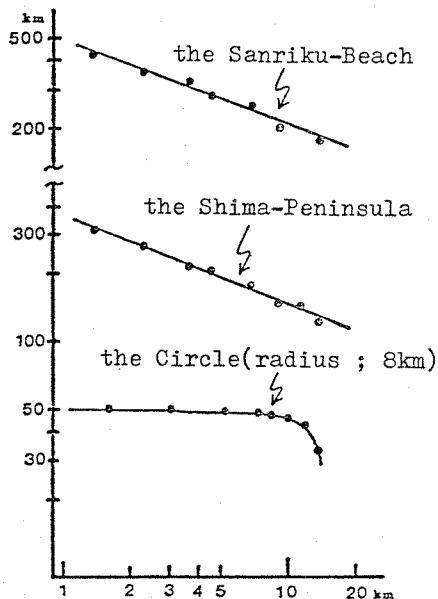
$$N(r) \propto r^{-D}$$

によって与えられるから r の関数として $\log N(r)$ vs $\log r$ をプロットすればよい。第 5 図にその手順を、第 6 図には代表的な日本の海岸線についての実測例を示す¹¹⁾。測定点が直線になっているのは、不規則で複雑な形をしていると思われている海岸線が Fractal 性をはっきりと持っていることを示しており、その次元はおよそ 1 と 1.3 の間である。図中、半径 8 km の円、すなわち極めて対称性のよい円が Fractal 性を持っていないことに注意したい。

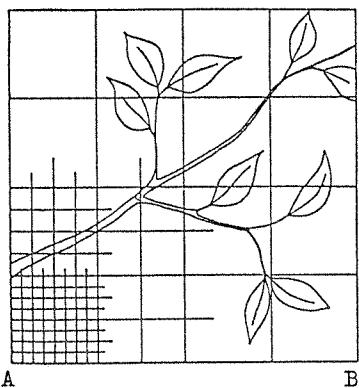
第 5 図 曲線の折れ線による近似



第6図 尺度の長さ(r)と、その長さを単位に測った海岸線の長さ(L)の関係、上から三陸海岸、志摩半島、半径8kmの円〔注11〕



第7図 一辺ABに接している正方形の数を n 、考えているくかたちがその大きさの正方形の中に含まれる場合の正方形の数を N とすれば $D = \log N / \log n$



A

B

さて、Fractal次元を求めるためのもうひとつの方法は、第7図に示すように、空間を一辺が r の細胞に分割し、 r を変化させながら、考えている形の一部を含むような細胞の個数 $N(r)$ を数える方法である。この方法は川や樹木のように分岐がある形の分析に有用であり、この手法によって求められたアマゾン川についての実測値は1.85、雨の少ない地方の川よりも分岐が多いことを示している¹²⁾。そのほか、分布関数や相関関数、あるいは変動のパワースペ

クトルから求めることもできる。いずれも、尺度 r の関数として、ある〈かたち〉が存在するための確率密度や相関関数が Fractal 性を有している場合には、それらの関数のベキ指数から理論的に Fractal 次元を算出することができる。

このように、Fractal 次元という新しい考え方は、一見ランダムだと思われているような〈かたち〉や現象の中に、ある種の統一的見解を与える、それらの奥に潜む自然の本性を理解するための、ひとつの有力な手がかりになりそうである。

5. 自然界の Fractal 構造と美について

我々は自然界の風物を見て美しいと感じ、そして芸術作品の中に美を観て感動する。この〈美しさ〉とは一体何を意味しているのか。美に関する哲学的考察については美学者に譲るとして、ここでは自然と芸術の中に共通してみられる数理的性質を数理物理学の立場、とりわけ、Fractal 性という新しい光の下で少しく論じてみたいと思う。まず、macro から micro へ、宇宙から原子、分子に至るまで、それぞれの階層構造において Fractal 的性質がいかに多く見受けられるかを概観することから始めよう。

あらためて記すまでもなく、我々の宇宙は、今からおよそ 150 億年の遠い昔、突如として、一点の限りなく熱く、限りなくまばゆい光の粒として誕生した¹³⁾。光のしづくは星となり、星は我々を創ったが、それらの星たちは集まって銀河をつくり、さらに銀河は力を及ぼしあって銀河団へと成長していった。さて、この広大無辺な宇宙の構造の中で、最もスケールの大きな分布はこれらの銀河の空間分布であるが、1985年にシカゴ大学の D. N. Schramm らによって、銀河分布がおよそ 1.2 次元の Fractal 分布であることが報告されている¹⁴⁾。3 次元的な空間における分布が 1.2 次元であるという事実は、宇宙の大半が真空中で空っぽであることを反映しているのであろう。

つぎに、もう少し近くの宇宙に目を向けてみよう。たとえば、月面のクレーターの写真を見せられたとき、写真の片隅に尺度の目安となる物体などがおかれていないかぎり、その写真が月面上何 km の高度から撮影されたものなののか、いいかえれば、クレーターの実際の大きさが何

km くらいのものなのか判断できないことがある。すなわち、クレーターのパターンだけを眺めていると、それは尺度不変性 (scale-invariant geometry) を有しており、つまり Fractal 的である。実際、クレーターの直径を r 、直径が r よりも大きいクレーターの存在確率を $P(r)$ とし、直径の分布の確率密度を $\rho(r)$ とすれば

$$P(r) = \int_r^\infty \rho(S) dS$$

尺度を変えても分布パターンが不变であるためには、任意の $\lambda > 0$ に対して、

$$P(r) \propto P(\lambda r),$$

これより

$$P(r) \propto r^{-D}$$

すなわち、直径 r 以上のクレーターの個数を $N(r)$ とすれば、

$$N(r) \propto r^{-D}$$

がえられる。つまり、直径の分布は Fractal 的である。〈神酒の海〉にあるクレーターについての実測では、およそ 2 次元の Fractal 分布が報告されている¹⁵⁾。余談になるが、これらの事実は、いん石や小惑星などのかたまりがこわれた時の大きさの分布が、粉碎の理論から Fractal 的であることと考えあわせると、月面のクレーターの形成がいん石などの衝突によるものであろうとの推論を裏づけるものもある。さて、地球規模の自然に関してであるが、これは前節で述べたように、海岸線や川の形、河川や樹木の分岐など、いわゆる〈かたち〉のあるものにはじまって、地球上の平均気温の変動、地球に降りそそぐ宇宙線強度の変動など、いずれも、Fractal 的な現象が数多く見いだされている¹⁶⁾。一例として、成城大学正門近く、歩道の傍らにひっそりとさいていた“つゆくさ”的一枝と、梅雨の合間に丹沢山塊の上にかかっていた美しい 5 種類の雲の形についての実測結果が、それぞれ、Fractal 次元 1.6, 1.4 を示していたことを第 8 図に示しておこう。ところで、原子、分子スケールでみた固体表面の凹凸、分子の凝着現象、あるいは、原子次元での衝突過程などにおいても、Fractal 的振る舞いがみられることも報告されている¹⁶⁾。

こうして考えてみると、宇宙から原子まで、スケールで考えれば、およそ 10^{40} という広範囲にわたって Fractal 性がみられ、したがって、そ

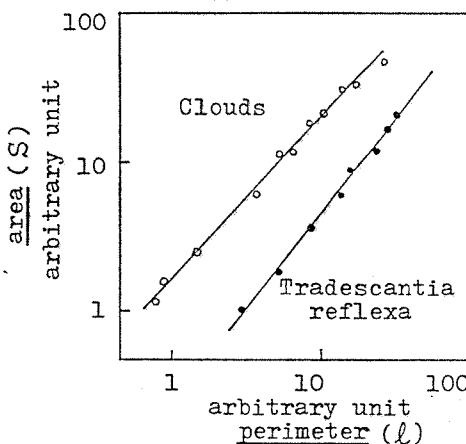
れは自然の本性と深く関わる基本的性質であると考えざるをえない。一体、なぜそうなのか、それは明確ではないが、おそらく識別不可能な多数の粒子からなる系の統計的性質によるものであろう。

さて、今度は芸術作品の方に目を再び転じてみよう。まず、前論文でとりあげた音楽の中の $1/f$

スペクトルは、およそ次元 2.0 の Fractal であることが理論的に導かれるが¹⁷⁾、それぞれの音楽は、それらが生まれた国の文化、時代、作曲者の個性などを反映して $1/f$ 領域が異なってはくるが、2.0 次元の Fractal を中心にして、さらに、低次元、高次元の Fractal、あるいは、より相関の弱い音の雲に覆われているかのようである。なぜ、音楽が Fractal 性をもつのかについては、確かな議論が行なえる段階ではないが、少なくとも、音楽の構造の中に、それを作る人間の生物体としての本性と基本的に関わる部分があるからであろう。そのひとつの可能性として、遺伝子の構造の中にみられる〈くりかえし構造〉がある。いささか余談めくが、ひとつの例としてあげておこう。

広く知られているように、遺伝子の本体であるとされているデオキシリボ核酸 “DNA” (deoxyribonucleic acid) は、通常 4 種類の塩基、A (adenine), G (guanine), T (thymine), そして C (cytosine) が 2 本の鎖状につながって、らせん構造を形成している。この連鎖は 4 種類の核酸の“くりかえし”であり、とくに酵素がとりつく場所には回文配列がみられることなどがわかっているが、これを、ひとつのテーマを呈示し、それを展開させ、かかる後に再現するという立場からみると、楽曲におけるソナタ形式との類似としてとりあげることもできよう。あるいはカノン、フーガ形式における“くりかえし”，“重ね合わせ”との関連において論ずることもできよう。さて、一例として、いささか作為的ではあ

第 8 図 雲と“つゆくさ”的周の長さ (l) と面積 (S) の関係



F. Chopin の Piano Sonata No. 1 第3楽章の一部(調性は原曲と異なる)に対する指揮法の配列

The diagram shows the tRNA structure with the anticodon loop at the top and the amino acid arm at the bottom. The anticodon sequence is UGG, which is complementary to the mRNA codon AUG. The amino acid arm ends in a CCA sequence, which is the acceptor site for amino acids. The tRNA is shown with its characteristic cloverleaf shape.

第10圖

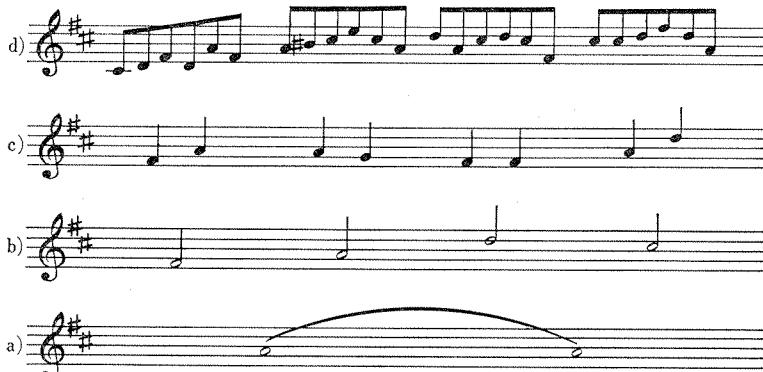
ヒトのインシデント受容体ペータ鎖遺伝子の塩基配列のある領域と、それを楽譜化したもの [注18]

るが、五線譜上、Aを〈D〉、〈E〉音に、Gを〈F〉、〈G〉音に、T{あるいはリボ核酸“RNA”(ribonucleic acid)で表現する場合には、uracil:U}を〈A〉、〈B〉音に、そしてCを〈C〉、〈H〉音などに対応させて、F. Chopin の Piano Sonata 第1番、第3楽章の中間部を部分的に記号化してみると（勿論、音楽的表現としては必ずしも正確ではないが）、第9図のようになる。一方、ヒトのインシュリン受容体ベータ鎖遺伝子の塩基配列の一部を楽譜化すると第10図のようになり、驚くべきことではあるが、両者の間には明らかに類似性がみられる。とりわけ、主題の旋律の配列は UUUGGGACC であるが、ヒトのインシュリンでは、これと、2つ、3つだけを塩基の異なったコピー配列が繰り返し出て来るところに注目したい。図中、3文字のアルファベットからなる記号はアミノ酸の種類を示す¹⁸⁾。

このように、ひとつの主題が繰り返され、しかも時系列の中で縮小されていく例は、Beethoven の Piano Sonata No. 15 (Op 28.: Pastoral) などに明確にみることができる。すなわち、音楽というひとつの時系列的な旋律の流れの中に、主題の形が入れ子のようにちりばめられているのは、まさに音楽の Fractal 構造そのものである。

ここでひとつの実験をしてみよう。まず、第11図(a)に示した音を基準にして“1/f ゆらぎ”で旋律の流れ(b)を作る。つぎに、その旋律を主題にして音を分割しながら、同様の手続きで、1/f スペクトルをもつよう新しい旋律を作り、重ねていく。すなわち、図中(a), (b), (c)そして(d)はそれぞれ 1/f ゆらぎをもったスペクトルで重ね書きされた Fractal

第11図 音のフランタル的階層構造 [(a)→(b)→(c)→(d)]



第12図 G. Fauré: Cantique de Jean RACINE の冒頭部分



音楽である。これらのスコアを整理して書き直してみると（多少の不自然さはのこるが），第12図にしめされたスコア，すなわち，G. Fauré の有名な楽曲：Cantique de Jean RACINE（ラシーヌ贊歌）と極めて似ていることがわかる。これは極端な例ではあるが，音楽の中に潜む Fractal 的性格を示すひとつのあかしとして考えたい。

さて，本節をしめくくるにあたって，造形の中にみられる Fractal 性について一言ふれておこう。さきに， $\sqrt{2}$ 長方形，黄金比が美の基準として，大きな意味をもっていることを対称性の立場から述べたが，実は，これらの比は，ひとつの限られたパターンの中で Fractal 構造をつくるのに，極めて適した形であることを指摘しておこう。たとえば， $\sqrt{2}$ 長方形はふたつ折りにすることにより，容易に相似がえられること，黄金比は正方形と円の簡単な組み合わせであるから，入れ子構造の構成が容易になる。前者の場合の典型的な例は，難波の四天王寺や大和の法隆寺の平面計画の中にみられ，後者については，Mondriaan のいわゆる〈格子〉などの中に明確に見ることができる。すなわち， $\sqrt{2}$ や黄金比もまた，Fractal 的性質を内在しているとみてよいと思う。ところで，自然の風物を人間が感覚で切り取って，絵画や造形にすると，自然の中でみたときよりも，Fractal 次元が大きくなる傾向があるようである。簡単な見積りではあるが，たとえば，尾形光琳筆の有名な国宝，〈紅白梅屏風〉にみられる梅の木の〈かたち〉，あるいは，一輪ざしに投げ入れられた花一輪，いずれの場合にも自然の状態よりも Fractal 次元が高くなっている。これは，おそらく，自然の一部を切り取ることによって，自然全体を描くためには，先に述べた〈曼荼羅〉の場合のよう

に、平面、あるいは造形空間において、ある種の Distortion が必要になるのであろう。

また、仏像に関して一言付け加えておくと（全体像のシェルエットについての簡単な estimation ではあるが）、たとえば、霧氷気がどことなく似通っている二体の仏像、すなわち奈良・秋篠寺の〈伎芸天像〉、伊勢原・日向薬師の日光菩薩の Fractal 次元はおよそ 1.38 で雲の次元に近い。これらのことから、我々は一体何を読み取るべきなのかは、今後慎重に議論されなければならないが、少なくとも、我々が〈美しい〉と感じて心を動かされるものの中には、この世界が識別不可能な多数の基本粒子から作られているがゆえにもつ数理の美しさとの関わりが潜んでいるのではないだろうか。

6. おわりに

かつて、イギリスの作家、Oscar Wilde は <Nature imitates Art (自然は芸術を模倣する)> と言った。このいささかパラドクシカルな表現は、現代物理学の世界観からすれば、実に自然で、当然のことのような響きをもって語りかけてくる。すでに述べたように、DNAひとつをとってみても、そこには宇宙の年齢、150 億年の歴史が秘められており、我々の美意識や感性について語るとき、宇宙の基本的性質を知らずしては片手落ちになるであろうし、そのことを裏返せば、人間が創りあげた芸術作品の中に逆に宇宙そのものが投影されていたとしても、それは至極當然のことであろう。

本論文の意図するところは、自然の中の美について、単に数理解析を試み、分析を行なっていこうということだけではなく、現代自然科学の窓から、我々人間もふくめて、自然をかいまみることによって、我々自身の存在理由について考え、人間の内存在の明るみに立つにはどうしたらよいのかという、我々にとって最も基本的な命題を考えるためのささやかなきっかけを提供することにある。そして科学のまなざしというものは決して冷酷無比なものではなく、むしろ、生きているということの不可思議さと神秘さを自然の中から感じとらせてくれる貴重な手段であることも強く訴えたいと思う。それと同時に、人間の感性に訴える解析法が、新しいパターンの発見や、自然の奥深く、かくれているであろう

真理の解明にいかに役立つものであるかも訴えたかった。

日本における文系、理系二分による教育は、文系から美しい論理の言葉を奪い、理系からはみずみずしく豊かな感性を抹消した。そのような状況の下で、大学の一般教育の果たすべき役割が如何に重大なものであるかは、理屈ではわかっていても、現実の問題となると実に心もとなない。本論文はささやかではあるが、ひとつの実践記録でもあり、今後的一般教育、真の意味での Liberal Arts Education のあり方を考える上での小さなきっかけにでもなれば幸いである。

〈教える〉とは希望を語ることであり、〈学ぶ〉とは知識で頭が重くなることではなく、心を自由に解き放つこと、そこに授業の原点をおきたいと思う。

〔注〕

- 1) 佐治晴夫：“成城文藝”，第111号（1985），p. 126(1)
- 2) H. Poincaré: “The Value of Science”, trans. G. B. Holstead, New York, Dover Publications (1985), p. 19.
- 3) H. Poincaré: “Science and Method”, trans. Maitland, New York, Dover Publications (1958), p. 59.
- 4) W. Heisenberg: “Physics and Beyond”, New York, Harper and Row (1971), p. 68.
- 5) 佐治晴夫：“素粒子・この小さな宇宙”，ほるぶ出版（1983）。
- 6) 柳亮：“続黄金分割”，美術出版社（1984）。
- 7) 柳亮：“黄金分割”，美術出版社（1984）。
- 8) 佐治晴夫：“文学” 第52巻10号，岩波書店（1984）p. 209 <芭蕉・燕村の時空>。
- 9) 佐治晴夫：“宇宙・素粒子・わたしたち”，ほるぶ出版（1986）。
- 10) B. B. Mandelbrot: “The Fractal Geometry of Nature”, Freeman, San Francisco (1982).
- 11) 高安秀樹：“フラクタル”，朝倉書店（1986）。
- 12) 砂漠の中を流れるナイル川の分岐のフラクタル次元は、およそ 1.4 であることが報告されている〔注11〕の文献参照〕。
- 13) 佐治晴夫：“宇宙・不思議ないれもの”，ほるぶ出版（1982）。
- 14) D. N. Schramm et al: “Nature”, 308 (1985) p. 718.
- 15) 水谷仁：“クレーターの科学”，東京大学出版会（1980）。
- 16) D. Avnir et al: “Nature”, 308 (1984), p. 261; D. Frain et al: “J.

Am. Chem. Soc.", 107 (1985), p. 3368.

- 17) パワースペクトル $S(f)$ と周波数 f との関係は、尺度変換に対して不変である場合には $S(f) \propto f^{-\beta}$ であたえられる。この時、フラクタル次元を D とすれば $\beta=5-2D$ (ただし, $1 < D < 2$ である)。
- 18) <>は音名を示す。A, Gを比較的低音に対応させたのは、たまたまそれらの分子量が大きいことによるが、塩基と音との対応は作者の好みにより任意に選んである。本例は米国, City of Hope 医学研究所の大野乾博士によるものである。